

PIOTR GÓRSKI^{*1}, MACIEJ DŁUŻNIEWSKI^{†1}**DRGANIA SWOBODNEGO PRĘTA JAKO WSTĘP
DO OPISU DRGAŃ KAMERTONU**¹ Instytut Fizyki Politechniki Łódzkiej, ul. Wólczańska 217/221, 93-005 Łódź, Polska

Przedstawiony w pracy opis drgań podłużnych i poprzecznych pręta pokazuje, że w przypadku wykorzystania drgającego pręta, jako elementu będącego źródłem fal mechanicznych w powietrzu decydujące znaczenie ma sposób zamocowania pręta oraz sposób pobudzania pręta do drgań.

Opis podłużnych drgań pręta znalazł między innymi zastosowanie w modelu tzw. rury Kundta, gdzie warunkiem wzbudzenia drgań pręta jest zamocowanie pręta na sztywno (w jednym lub w dwóch miejscach) tak, aby na jego końcach powstała strzałka.

Próba wykorzystania opisu drgań podłużnych pręta do wyjaśnienia zasady działania kamertonu, jako źródła fal mechanicznych w postaci dźwięku o zadanej częstotliwości, jest całkowicie błędna gdyż zgięty pręt w kamertonie nie jest w żadnym ustalonym miejscu sztywno zamocowany i dlatego nieuprawnione wydaje się założenie, że jego drgania są drganiami podłużnymi.

Słowa kluczowe: kamerton, drgania podłużne, drgania poprzeczne

1. ZASADA DZIAŁANIA KAMERTONU

Pod pojęciem kamertonu zwykle rozumie się przyrząd służący do strojenia instrumentów muzycznych. W gronie kamertonów najbardziej popularny jest tzw. kamerton widelkowy wynaleziony w Anglii w roku 1711 przez Johna Shora zwany „diapazonem” [1]. Takim kamertonem najczęściej jest metalowy pręt zgięty w połowie w kształcie litery U i umocowany na podstawie zwanej stopą. Zwykle stopa i pręt stanowią jedność. Widelki kamertonu pobudzane są do drgań poprzez uderzenie w jedno z ramion kamertonu młoteczką. Widok typowego kamertonu stroikowego (służącego do strojenia instrumentów przedstawiono na rysunku 1.

^{*}piotr.gorski@p.lodz.pl[†]maciej.dluzniewski@p.lodz.pl

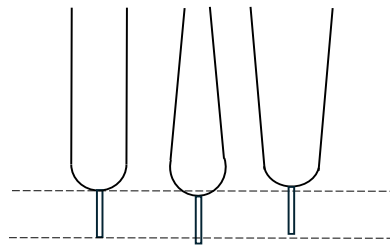


Rysunek 1. Kamerton stroikowy ustawiony na tzw. pudle rezonansowym wraz z wyposażeniem w postaci młoteczka

Źródło: opracowanie własne.

Zasada działania kamertonu polega na wzbudzeniu w nim złożonych drgań widełek w wyniku uderzenia młoteczkiem. Widełki drgają:

1. stają się źródłem fali akustycznej (o zadanej częstotliwości) w otaczającym kamerton powietrzu,
2. wprowadzają w drgania stopę, co schematycznie przedstawiono na rysunku 2.

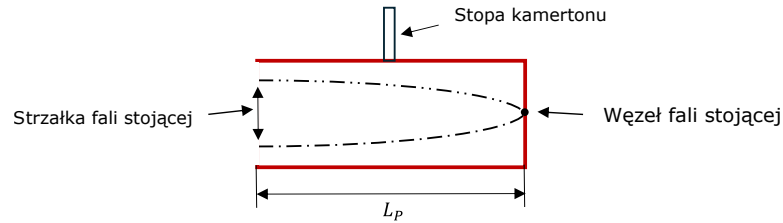


Rysunek 2. Zasada wprowadzenia w ruch góra-dół stopy kamertonu. Gdy ramiona kamertonu są zbliżone do siebie to wygięcie w kształcie litery U zmienia nieznacznie swój kształt powodując obniżenie położenia stopy. Gdy z kolei ramiona kamertonu są oddalone, to kształt litery U ulega spłaszczeniu i stopa unosi się do góry

Źródło:[2].

Z uwagi na fakt, że same drgające ramiona są słabym promiennikiem fal akustycznych, brzmienie kamertonu można wzmocnić umieszczając stopę na odpowiednio skonstruowanym pudle rezonansowym, co pokazano na rysunku 3. Pudło stanowi płaska skrzynka otwarta z jednego lub obu końców. Długość pudła jest tak dobrana, aby w przypadku pudła otwartego na jednym końcu miało ono długość równą $1/4$ długości fali dźwiękowej w powietrzu powstałej w wyniku drgań stopy z zadaną częstotliwością. W przypadku pudła obustronnie otwartego długość pudła to $1/2$ długości fali dźwiękowej w powietrzu.

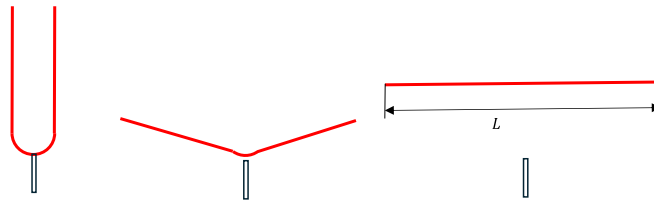
Konstrukcja pudła wzmacniającego dźwięk oparta jest na zjawisku rezonansu. Gdy generator fal dźwiękowych (takim jest drgająca stopa kamertonu) umieścić w środku górnej powierzchni jednostronnie otwartego pudła to po wprowadzeniu powierzchni w drgania może w pudle powstać fala stojąca, co zobrazowano na rysunku 3.



Rysunek 3. Rezonans fali dźwiękowej w pudle jednostronnie otwartym. Długość pudła $L_P = \lambda_P/4$, gdzie $\lambda_P = \frac{v_P}{f_K}$. Oznaczenia: λ_P to długość fali akustycznej w powietrzu, v_P to prędkość fazowa rozchodzenia się fali akustycznej w powietrzu, zaś f_K jest częstotliwością drgań kamertonu

Źródło: opracowanie własne.

Analiza drgań kamertonu jest dosyć skomplikowana. Podstawowy model drgań można opisać poprzez rozważenie rozchodzenia się zaburzenia w rozprostowanym kamertonie pozbawionym stopy, co przedstawiono na rysunku 4, z uwzględnieniem, że środek tak powstałego pręta musi drgać. W dalszej części zostanie rozstrzygnięte czy te drgania są podłużne czy poprzeczne.



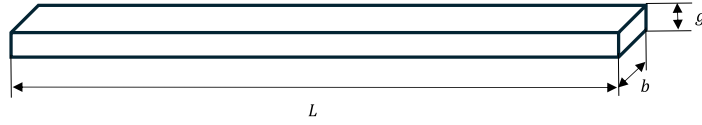
Rysunek 4. Rozprostowany i rozmontowany kamerton. Widelki można przedstawić, jako pręt o długości L

Źródło: opracowanie własne.

Wprawienie pręta w drgania polega na uderzeniu w niego młoteczkiem. Podczas uderzenia młoteczka, wektor prędkości $\vec{v}_M$ z jaką uderza on w pręt może być nachylony pod dowolnym kątem do pręta. Skutkuje to tym, że w pręcie mogą rozchodzić się dwa zaburzenia: podłużne – wzdłuż osi pręta, poprzeczne – prostopadle do osi pręta.

2. DRGANIA PODŁUŻNE PRĘTA

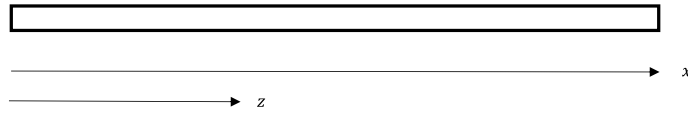
Można założyć, że pręt, w którym będzie rozchodzić się fala podłużna to prostopadłościan o długości L i wymiarach poprzecznych $b \times g$, jak na rysunku 5.



Rysunek 5. Widok analizowanego pręta o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta o wymiarach $b \times g$

Źródło: opracowanie własne.

Wprowadzając jednowymiarowy układ odniesienia $\{x, z\}$, położenie pręta można zobrażować jak na rysunku 6.



Rysunek 6. Położenie pręta w jednowymiarowym układzie odniesienia $\{x, z\}$

Źródło: opracowanie własne.

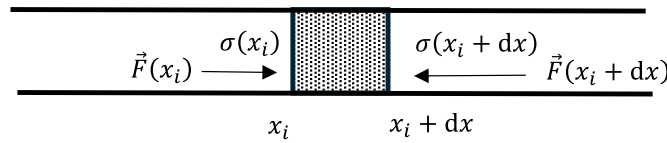
Pręt wykonany jest z materiału, dla którego znane są: gęstość ρ oraz moduł Younga E . Niech w odległości x_i od początku pręta znajduje się odcinek pręta o długości dx . Wiadomo, że w dowolnym punkcie x_i pręta o przekroju poprzecznym S występują naprężenia normalne $\sigma(x_i)$ opisane wzorem

$$\sigma(x_i) = \frac{F(x_i)}{S}, \quad (1)$$

gdzie $F(x_i)$ jest wartością siły prostopadłej do przekroju poprzecznego pręta. Obecność naprężenia skutkuje pojawieniem się deformacji $\varepsilon(x_i)$, związanej z naprężeniem $\sigma(x_i)$ poprzez prawo Hooke'a

$$\varepsilon(x_i) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} = \frac{1}{E} \sigma(x_i). \quad (2)$$

Założenie, że młoteczek uderza cyklicznie w pręt z częstością ω_{ML} , prowadzi do wniosku, że pod wpływem tych uderzeń w pręcie rozchodzą się cykliczne naprężenia normalne. Wówczas naprężenia $\sigma(x_i)$ oraz $\sigma(x_i + dx)$ występujące w pobliżu odcinka dx pręta można przedstawić tak jak na rysunku 7.



Rysunek 7. Naprężenia i siły występujące na obu końcach odcinka dx pręta

Źródło: opracowanie własne.

Oznacza to, że zgodnie ze wzorem (2.1) i (2.2) na lewy przekrój odcinka dx pręta podziała

siła $F(x_i)$ równa

$$F(x_i) = ES \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i}, \quad (3)$$

zaś na prawy przekrój odcinka pręta dx podziała siła $F(x_i + dx)$ równa

$$F(x_i + dx) = ES \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i + dx}. \quad (4)$$

Zwrot siły $F(x_i + dx)$ jest przeciwny do zwrotu siły $F(x_i)$. Wynika to z trzeciej zasady dynamiki Newtona. W rzeczywistości siła $F(x_i + dx)$ jest przyłożona ze strony elementu dx na kolejny element znajdujący się po prawej stronie od dx , podobnie jak siła $F(x_i)$ jest siłą przyłożoną do elementu dx ze strony sąsiadującego z dx elementu po jego lewej stronie.

Oznacza to, że na element dx działa wypadkowa siła F , której wartość można wyznaczyć w oparciu o zależności (3) i (4) ze wzoru

$$F = F(x_i + dx) - F(x_i) = ES \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i + dx} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} \right]. \quad (5)$$

Rozwijając funkcję $\frac{\partial z}{\partial x}$ w szereg Taylora i ograniczając rozwinięcie jedynie do pierwszego składnika szeregu, można otrzymać

$$F \cong ES \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} \right] \cong ES \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx. \quad (6)$$

Pod wpływem siły F , zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, element dx o masie dm porusza się z przyspieszeniem a opisanym równaniem

$$a = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F}{dm} = \frac{F}{\rho S dx}. \quad (7)$$

Podstawiając zależność (6) do (7) otrzymuje się równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{ES \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx}{\rho S dx} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i}. \quad (8)$$

Z uwagi na fakt, że długość elementu dx jest bardzo mała, to we wzorze (8) można opuścić indeks x_i i otrzymać równanie fali dla dowolnego punktu x pręta w postaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego drugiego stopnia jest między innymi funkcja $z(x, t)$ opisana równaniem

$$z(x, t) = A_L \sin(\omega_M t - k_L x + \varphi_0), \quad (10)$$

gdzie A_L jest amplitudą drgań podłużnych, ω_M jest częstością drgań dowolnego elementu dx pręta oraz $k_L = 2\pi/\lambda_L$ jest tzw. wektorem falowym fali podłużnej o długości λ_L pod warunkiem, że

$$\left(\frac{\omega_M}{k_L} \right)^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (11)$$

Równanie (10) opisuje rozchodzenie się w pręcie podłużnej fali płaskiej, dla której wyrażenie będące argumentem funkcji sinus jest tzw. fazą fali $\varphi(x, t)$ równą

$$\varphi(x, t) = (\omega_M t - k_L x + \varphi_0), \quad (12)$$

gdzie φ_0 jest tzw. fazą początkową.

Ustalając dowolną wartość funkcji opisanej wzorem (12) – np. niech $\varphi(x, t) = \varphi_C$ – można sprawdzić jak jednocześnie muszą zmieniać się argumenty funkcji (12) (czyli x i t) aby faza fali pozostawała taka sama (stała). Wynika stąd, że różniczka takiej fazy musi być równa zeru

$$d(\varphi(x, t)) = d\varphi_C = 0. \quad (13)$$

Oznacza to, że

$$d(\varphi(x, t)) = d(\omega_M t - k_L x + \varphi_0) = \omega_M dt - k_L dx = 0. \quad (14)$$

Stąd

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_M}{k_L}. \quad (15)$$

Wyrażenie (15) opisuje prędkość, z jaką przesuwa się wzdłuż osi x stała faza np. φ_C i stąd nazwa tej prędkości to „prędkość fazowa v_F ” rozchodzącej się w pręcie fali podłużnej opisanej równaniami (9) i (10) i wynosi ona (w oparciu o wzór (11))

$$v_F = \frac{\omega_M}{k_L} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16)$$

Zgodnie z zasadą Huygensa, gdy fala dotrze do końca pręta (np. $x = L$) punkt końcowy staje się źródłem wtórnej fali (tzw. odbitej) o dokładnie takiej samej częstotliwości jak fala pierwotna tyle, że wędrującej w przeciwną stronę niż fala pierwotna. Ośrodkiem otaczającym pręt jest powietrze, którego opór falowy $Z_{\text{powietrze}} = \rho_p v_F^{(p)}$, gdzie gęstość powietrza $\rho_p \cong 1,185 \text{ kg m}^{-3}$ zaś $v_F^{(p)} \cong 346 \text{ m s}^{-1}$ jest prędkością fazową fali w powietrzu. Opór falowy powietrza jest dużo mniejszy od oporu falowego pręta $Z_{\text{pręta}} = \rho v_F = \sqrt{E\rho}$, co skutkuje tym, że fala odbita na końcu pręta nie jest przesunięta w fazie względem fali padającej. Oznacza to, że w pręcie przemieszczają się dwie fale wzajemnie spójne (o tych samych częstotliwościach i porównywalnych amplitudach A_L) nakładające się na siebie, czyli w tym przypadku interferujące ze sobą zgodnie z równaniem

$$z(x, t) = A_L \sin(\omega_M t - k_L x) + A_L \sin(\omega_M t + k_L x). \quad (17)$$

Wykorzystując wzór trygonometryczny

$$\sin \alpha + \sin \theta = 2 \sin \frac{\alpha + \theta}{2} \cos \frac{\alpha - \theta}{2} \quad (18)$$

oraz fakt, że funkcja cosinus jest funkcją parzystą, równanie (17) przyjmuje postać

$$z(x, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L x). \quad (19)$$

Fala odbita wędrując w pręcie ponownie odbija się, ale tym razem na drugim końcu pręta (w punkcie $x = 0$). Zgodnie ze wzorem (19)

$$z(x = 0, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L \times 0) = 2A_L \sin(\omega_M t). \quad (20)$$

Oznacza to, że w tym punkcie pręt drga z maksymalną amplitudą równą $2A_L$. Ale z punktu widzenia symetryczności zjawiska identyczna sytuacja musi mieć miejsce w punkcie $x = L$, czyli

$$z(x = L, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L L) = 2A_L \sin(\omega_M t). \quad (21)$$

Zatem koniec pręta ($x = L$) drga z amplitudą $2A_L$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\cos(k_L L) = \pm 1. \quad (22)$$

Gdy $\cos(k_L L) = -1$ to $k_L L = \pi$. Oznacza to, że w pręcie rozchodzi się fala o długości λ_{L1} , którą można wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{2\pi}{\lambda_{L1}} L = \pi, \quad (23)$$

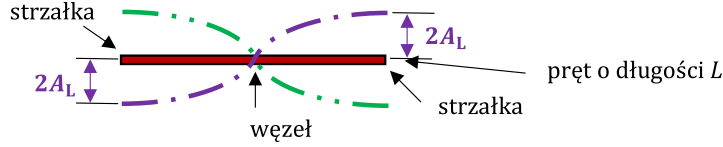
czyli

$$\lambda_{L1} = 2L. \quad (24)$$

Długości fali λ_{L1} odpowiada częstotliwość f_{L1} drgań podłużnych każdego elementu pręta

$$f_{L1} = \frac{v_F}{\lambda_{L1}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (25)$$

Takie drganie można zobrazować jak na rysunku 8.



Rysunek 8. *Drganie podłużne pręta z częstotliwością f_{L1} . Jest to tzw. „mod podstawowy” drgającego pręta*
Źródło: opracowanie własne.

Gdyby z kolei $\cos(k_L L) = +1$, to $k_L L = 2\pi$. Oznacza to, że w pręcie rozchodzi się fala o długości λ_{L2} , którą można wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{2\pi}{\lambda_{L2}} L = 2\pi, \quad (26)$$

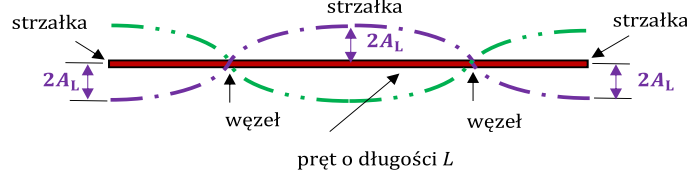
czyli

$$\lambda_{L2} = L. \quad (27)$$

Długości fali λ_{L2} odpowiada częstotliwość f_{L2} drgań każdego elementu pręta

$$f_{L2} = \frac{v_F}{\lambda_{L2}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2 \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2f_{L1}. \quad (28)$$

Takie drganie można zobrazować jak na rysunku 9.



Rysunek 9. *Drganie podłużne pręta z częstotliwością f_{L2} . Jest to tzw. „drugi mod harmoniczny” drgającego pręta*
Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione na rysunkach 8 i 9 drgania pręta stanowią przykłady tzw. fal stojących, które mogą zaistnieć w drgającym pręcie. Niemniej warunkiem ich powstania jest okresowe uderzanie młoteczkiem w pręt. Zakładając, że brak jest czynników rozpraszających energię, to gdy w całkowitej objętości pręta przemieszczają się w obie strony fale spójne można w pewnym momencie odstąpić od uderzania młoteczkiem w pręt a fala stojąca będzie nieskończenie długo występować w pręcie.

W pręcie można wzbudzić kolejne mody fal stojących, którym odpowiadają coraz to wyższe częstotliwości – odpowiednio f_{L3} , f_{L4} , ..., f_{Ln} , gdzie n jest liczbą naturalną – będące wielokrotnością częstotliwości podstawowej f_{L1}

$$f_{Ln} = n f_{L1}. \quad (29)$$

O tym jaki mod (sposób) drgania wystąpi decydują dwa czynniki:

1. sposób zamocowania (podparcia) pręta,
2. zasoby energetyczne.

Zamocowanie na stałe pręta w jego środku powoduje, że w pręcie rozchodzi się fala o częstotliwości f_{L1} lub fala o częstotliwości będącej nieparzystą wielokrotnością częstotliwości f_{L1} . Zamocowanie pręta w dwóch miejscach (w węzłach jak na rysunku 9) skutkuje drganiami pręta z częstotliwością f_{L2} lub parzystymi wielokrotnościami f_{L1} . Gdyby jednak sposób zamocowania pręta był nieustalony to o wyborze sposobu drgań zadecyduje energia drgającego pręta.

Objętościową gęstość energii fali mechanicznej ρ_V^{En} w punkcie P o współrzędnej x_P opisuje wzór

$$\rho_V^{En}(x, t)_P = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_P^2 + v_F^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P^2 \right]. \quad (30)$$

Po podstawieniu równania fali stojącej (19) do powyższego wzoru

$$\rho_V^{En}(x, t)_P = 2 \rho A_L^2 \omega_M^2 [\cos^2(k_L x_P) \cos^2(\omega_M t) + \sin^2(k_L x_P) \sin^2(\omega_M t)]. \quad (31)$$

Stąd energię En drgającego pręta w danej chwili $t^\oplus$ opisuje wzór

$$En(t^\oplus) = \int_0^L \rho_V^{En}(x, t^\oplus) dx. \quad (32)$$

Po podstawieniu (31) do (32) końcowy wzór na energię $En(t^{\otimes})$ drgającego pręta jest postaci

$$En(t^{\otimes}) = 2\rho A_L^2 \omega_M^2 \left[\frac{1}{2}L + \frac{\lambda_L}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi L}{\lambda_L}\right) \cos(2\omega_M t^{\otimes}) \right]. \quad (33)$$

Średnią energię $\langle En \rangle$ drgającego pręta w jednym okresie T jego drgania opisuje wzór

$$\langle En \rangle = \frac{\int_0^T En(t^{\otimes}) dt^{\otimes}}{T}. \quad (34)$$

Stąd po podstawieniu (33) do (34) średnia energia wynosi

$$\langle En \rangle = 2\rho A_L^2 \omega_M^2 \cdot \frac{1}{2}L = \rho L A_L^2 \omega_M^2 = 4\pi^2 \rho L A_L^2 f_L^2. \quad (35)$$

Oznacza to, że średnia energia drgającego pręta zależy od kwadratu częstotliwości modu drgania i jest najmniejsza dla podstawowego modu, czyli drgania pręta z częstotliwością f_{L1} . Zatem mając do wyboru różne mody drgania, gdy brak jest warunków brzegowych związanych ze sposobem zamocowania pręta, wybiera on drganie o jak najmniejszej energii czyli drganie z częstotliwością f_{L1} , jak gdyby „sugerując” aby go podeprzeć w jego środku. Porównując rysunek 4 z 8 widać tutaj pewien problem. Zgodnie z rysunkiem 4 w środku pręta, (czyli tam gdzie znajduje się stopa kamertonu) powinny występować drgania. Ale zgodnie z rysunkiem 8, dla podstawowego modu drgania pręta, w jego środku znajduje się węzeł. To z kolei sugeruje, że dobrze by było, aby w takim przecie powstał „drugi mod harmoniczny drgania” ze strzałką w środku pręta. Aby tak jednak mogło się stać, pręt musiałby być podparty w węzłach jak na rysunku 9. Z zasady działania kamertonu wynika jednak, że pręt z którego jest on wykonany nigdzie z wyjątkiem jego środka, gdzie umieszczona jest stopa kamertonu, nie jest podparty. To podparcie w środku pręta jest szczególne, bo stopa kamertonu działa jak przetwornik „mechaniczno-akustyczny” przenoszący drgania pręta na powierzchnię pudła, do której dotyka nóżka, tak jak pokazano na rysunkach 1–3.

Podsumowując powyższe rozważania należy podkreślić, że drgania podłużne nie wystarczają do opisu działania kamertonu z następujących powodów.

1. Wymagają one cyklicznego uderzania młoteczką, najlepiej w specyficzny sposób, równoległe do pręta, przy czym częstotliwość f_L uderzeń musi spełniać warunek

$$f_L = \frac{v_F}{\lambda_L}. \quad (36)$$

Dodatkowo, aby powstała fala stojąca

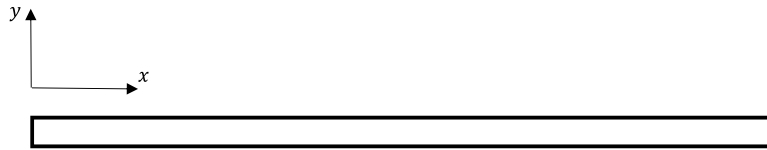
$$L = n \frac{\lambda_L}{2}, \quad (37)$$

gdzie z kolei $n \in \mathbb{N}$ (należy do zbioru liczb naturalnych) i stanowi o tzw. rzędzie fali harmoniczej. A w praktyce w kamerton uderza się tylko raz.

2. Nawet gdyby uderzać cyklicznie, to dla podstawowego modu drgającego, nie zamocowanego w specjalny sposób pręta, w jego środku powstaje węzeł, a w rzeczywistości powinna w tym miejscu być możliwość drgania pręta – czyli najlepiej gdyby w środku pręta powstawała strzałka.
3. Drgający kamerton jest słabym emiterem fal dźwiękowych w powietrzu i o jego funkcjonalności stanowi przede wszystkim możliwość pobudzania do drgań punktu styku stopy kamertonu z podłożem.

DRGANIA POPRZECZNE PRĘTA

Modelowy pręt przedstawia nadal rysunek 5. Korekty wymaga wprowadzenie kartezjańskiego, dwuwymiarowego $\{x, y\}$ układu odniesienia co przedstawia rysunek 10.



Rysunek 10. Położenie pręta w kartezjańskim układzie odniesienia $\{x, y\}$

Źródło: opracowanie własne.

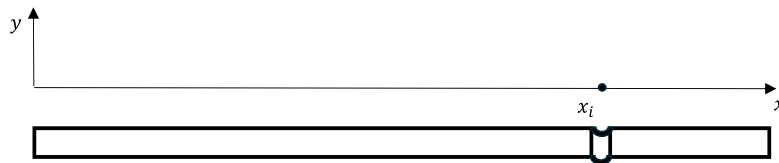
Niech w chwili początkowej w pręt w punkt o dowolnej współrzędnej x_i uderza prostopadle do pręta młoteczek, tak jak na rysunku 11.



Rysunek 11. Uderzenie młoteczka w pręt

Źródło: opracowanie własne.

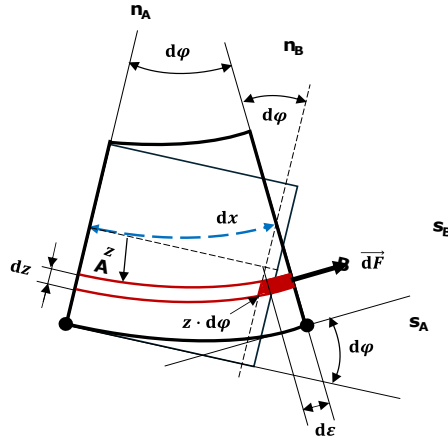
Powoduje to, że w miejscu uderzenia x_i pojawia się odkształcenie pręta w kształcie, które przypomina literę U. Można to zobrazować jak na rysunku 12.



Rysunek 12. Lokalne odkształcenie pręta w punkcie o współrzędnej x_i spowodowane uderzeniem młoteczka

Źródło: opracowanie własne.

To lokalne odkształcenie odcinka dx pręta w punkcie x_i można powiększyć, co przedstawiono na rysunku 13.



Rysunek 13. Powiększenie lokalnego odcinka dx pręta. Linia przerywana przechodząca przez środek pręta (oznaczona kolorem niebieskim) to tzw. linia (warstwa) neutralna pręta. Pod wpływem deformacji nie ulega ona ani wydłużeniu, ani skróceniu. Warstwy pręta położone powyżej warstwy neutralnej ulegają skróceniu, zaś warstwy położone poniżej ulegają wydłużeniu. s_A i s_B to styczne do zdeformowanego odcinka dx pręta w punktach A i B. n_A i n_B to tzw. normalne, czyli proste prostopadłe do stycznych odpowiednio s_A i s_B

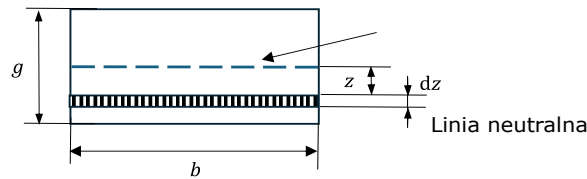
Źródło: opracowanie własne.

Celem rozwiązania zagadnienia drgań poprzecznych pręta jest znalezienie algebraicznej postaci funkcji opisującej zależność y od x dla linii neutralnej (niebieskiej na rysunku 13) czyli funkcji $y(x)$.

Niech w odległości z od linii neutralnej znajduje się warstwa o grubości dz , która ulega wydłużeniu o $d\varepsilon$. Aby to było możliwe do tej warstwy musi być przyłożona siła $d\vec{F}$, normalna do warstwy, o wartości dF i spełniająca prawo Hooke'a

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{E} \frac{dF}{dS}, \quad (38)$$

gdzie dS jest polem powierzchni przekroju warstwy o grubości dz . Przekrój poprzeczny pręta, jako prostokąta o wymiarach $b \times g$, przedstawiono na rysunku 14.



Rysunek 14. Przekrój poprzeczny pręta

Źródło: opracowanie własne.

Stąd element powierzchni dS wynosi

$$dS = b \cdot dz. \quad (39)$$

Zgodnie z rysunkiem 13 deformacja $d\varepsilon$ warstwy dS wynosi

$$d\varepsilon = z \cdot d\varphi, \quad (40)$$

gdzie $d\varphi$ jest kątem pomiędzy normalnymi do wygiętego fragmentu dx pręta w punktach A i B .

Podstawiając (39) i (40) do równania (38) można wyznaczyć wartość siły normalnej dF niezbędnej do deformacji warstwy dz

$$dF = E b dz \frac{z d\varphi}{dx} = Eb \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) z dz. \quad (41)$$

Wartość całkowitego momentu siły $\vec{M}$ potrzebnego do zdeformowania fragmentu dx wynosi

$$M = \int_{-g/2}^{g/2} z dF = Eb \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \int_{-g/2}^{g/2} z^2 dz. \quad (42)$$

Występująca we wzorze całka oznaczona jest tzw. „momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki” i wynosi

$$J = b \int_{-g/2}^{g/2} z^2 dz = \frac{1}{12} b g^3. \quad (43)$$

Oznacza to, że całkowity moment siły opisuje wzór

$$M = E \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot J. \quad (44)$$

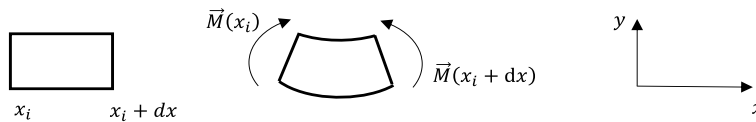
Występująca we wzorze (44) pochodna $\frac{d\varphi}{dx}$ opisuje tzw. krzywiznę K linii neutralnej, zapisanej jako funkcja $y(x)$, w punkcie x_i

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x_i} = K(x_i). \quad (45)$$

Wówczas wzór (44) przyjmuje postać

$$M(x_i) = E \cdot J \cdot K(x_i). \quad (46)$$

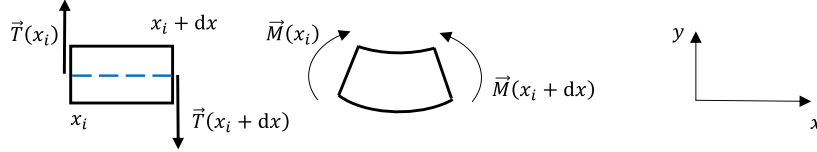
Aby fragment belki dx mógł się lokalnie wygiąć, muszą być do tego fragmentu przyłożone momenty sił $\vec{M}$ jak na rysunku 15.



Rysunek 15. *Momenty sił niezbędne do zdeformowania fragmentu belki dx*

Źródło: opracowanie własne.

Momentom sił towarzyszą siły $\vec{T}$ prostopadle warstwy neutralnej pręta, zwane siłami tnącymi [3]. Siłę tnącą (poprzeczną) przyjmuje się jako dodatnią, gdy będzie ona dążyła do wywołania ruchu obrotowego analizowanego elementu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Można to zobrazować na rysunku 16.



Rysunek 16. Siły tnące (poprzeczne) przyłożone do elementu dx pręta
Źródło: opracowanie własne.

W stanie równowagi można wyznaczyć równania momentów sił względem środka ciężkości elementu dx , który to środek umieszczono w punkcie o współrzędnej $x_i + dx$

$$T(x_i) \cdot dx + M(x_i) - M(x_i + dx) - T(x_i + dx) \cdot 0 = 0. \quad (47)$$

Ale

$$M(x_i + dx) = M(x_i) + dM = M(x_i) + \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (48)$$

Stąd

$$T(x_i) \cdot dx + M(x_i) - \left[M(x_i) + \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx \right] = 0, \quad (49)$$

czyli

$$T(x_i) \cdot dx = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (50)$$

Oznacza to, że siła tnąca w punkcie o współrzędnej x_i wynosi

$$T(x_i) = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i}. \quad (51)$$

Podstawiając zależność (46) do (51) dostajemy, że siłę tę opisuje wzór

$$T(x_i) = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{x_i}. \quad (52)$$

Krzywiznę linii neutralnej $y(x)$ fragmentu dx belki w punkcie x_i opisuje znany z geometrii różniczkowej [4] wzór

$$K(x_i) = \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i}}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_i}^2} \right]^3}. \quad (53)$$

Z uwagi na fakt, że element dx jest bardzo mało odkształcony

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_i} \ll 1 \quad (54)$$

wynika, że

$$K(x_i) \cong \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i}. \quad (55)$$

Po podstawieniu wyrażenia (55) do (52) otrzymać można wzór opisujący wartość siły ścinającej

$$T(x_i) = E \cdot J \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i} = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x_i} \quad (56)$$

Stąd wypadkowa, pionowa siła $F(x_i)$ działająca na element dx , chcąc go przywrócić do położenia równowagi, wynosi

$$F(x_i) = T(x_i) - T(x_i + dx) \quad (57)$$

i jest ona skierowana zgodnie ze zwrotem osi y na rysunku 16.

Rozwijając funkcję $T(x)$ w szereg Taylora można ograniczyć się do pierwszego wyrazu rozwinięcia

$$T(x_i + dx) \cong T(x_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (58)$$

Po podstawieniu zależności (58) do (57) wartość siły $F(x_i)$ opisuje wzór

$$F(x_i) \cong T(x_i) - \left[T(x_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx \right] \cong - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (59)$$

Podstawienie wyrażenia (56) do (59) prowadzi do wzoru

$$F(x_i) \cong -EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx. \quad (60)$$

Siła ta zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona działając na masę dm elementu dx jest równa

$$F(x_i) = dm \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} = \rho S dx \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i}. \quad (61)$$

Porównując wzory (60) i (61)

$$\rho S dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} \cong -EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx. \quad (62)$$

Stąd

$$\rho S dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx \cong 0, \quad (63)$$

czyli

$$\left[\rho S \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} \right] dx \cong 0. \quad (64)$$

Oznacza to, że równanie opisujące współrzędną y ruchu elementu dx pod wpływem uderzenia młoteczkiem jest postaci

$$\rho S \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (65)$$

Jest to poszukiwane równanie różniczkowe opisujące zależność $y(x, t)$ dla linii neutralnej belki [5].

Porównując równanie (9) opisujące propagację fali podłużnej w belce z równaniem (65) opisującym propagację poprzecznego zaburzenia w belce widać, że równanie (65) nie jest klasycznym równaniem falowym.

Równanie (65) można zapisać w postaci

$$\rho \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + E \frac{J}{S} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (66)$$

Niech

$$\frac{J}{S} = \chi^2. \quad (67)$$

Stąd, w oparciu o wzór (16) kładąc, że $v_F = c$ jest prędkością fali podłużnej w pręcie

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + \frac{E}{\rho} \frac{J}{S} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + c^2 \chi^2 \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (68)$$

Powyższe równanie można rozwiązać metodą separacji zmiennych [5]. Niech funkcja $y(x, t)$ będzie iloczynem dwóch funkcji: jednej $\Gamma(t)$ zależnej tylko od czasu oraz drugiej $\Psi(x)$ zależnej jedynie od położenia, zgodnie z równaniem

$$y(x, t) = \Gamma(t) \Psi(x). \quad (69)$$

Wówczas

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = \Psi(x) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = \Gamma(t) \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right). \quad (70)$$

Po podstawieniu (70) do (68)

$$\Psi(x) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) + (c\chi)^2 \Gamma(t) \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (71)$$

Po separacji zmiennych wzór (71) przyjmuje postać

$$\frac{1}{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) = -(c\chi)^2 \frac{1}{\Psi(x)} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right). \quad (72)$$

Można przyjąć, że lewa i prawa strona tego równania są równe pewnej ujemnej stałej $-\omega^2$

$$\frac{1}{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) = -\omega^2 \quad (73)$$

oraz

$$-(c\chi)^2 \frac{1}{\Psi(x)} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) = -\omega^2. \quad (74)$$

Z równania (73) wynika, że

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) + \omega^2 \Gamma(t) = 0. \quad (75)$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja zespolona

$$\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}_0 e^{i\omega t} + \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 e^{-i\omega t}. \quad (76)$$

Z kolei z równania (74) wynika, że

$$\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4}\right) = \left(\frac{\omega}{c\chi}\right)^2 \Psi(x). \quad (77)$$

Wprowadzając nową zmienną v taką, że

$$v^2 = \omega c\chi \quad (78)$$

równanie (77) można zapisać jako

$$\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4}\right) = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x). \quad (79)$$

Poszukiwaną funkcją $\Psi(x)$ jest taka funkcja, której czwarta pochodna jest podobna do danej. Stąd funkcję $\Psi(x)$ przedstawić można w postaci wykładniczej

$$\Psi(x) = Ae^{\gamma x}. \quad (80)$$

Po podstawieniu zależności (80) do (79)

$$\gamma^4 Ae^{\gamma x} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 Ae^{\gamma x}. \quad (81)$$

Oznacza to, że

$$\gamma^4 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4. \quad (82)$$

Wzór (82) można przedstawić w postaci

$$\gamma^4 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 = \left(\gamma^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) \cdot \left(\gamma^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) = 0. \quad (83)$$

Stąd

$$\left(\gamma - \frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma + \frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma - i\frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma + i\frac{\omega}{v}\right) = 0. \quad (84)$$

Oznacza to, że są cztery różne γ

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{v}, \quad \gamma_2 = -\frac{\omega}{v}, \quad \gamma_3 = i\frac{\omega}{v}, \quad \gamma_4 = -i\frac{\omega}{v} \quad (85)$$

oraz, że funkcja $\Psi(x)$ przyjmuje postać

$$\Psi(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} + A_3 e^{\gamma_3 x} + A_4 e^{\gamma_4 x}. \quad (86)$$

Wynika stąd, że funkcja $y(x, t)$, zgodnie ze wzorem (69), przyjmuje postać

$$\tilde{y}(x, t) = e^{i\omega t} \cdot \left[\tilde{A} e^{\frac{\omega}{v}x} + \tilde{B} e^{-\frac{\omega}{v}x} + \tilde{C} e^{i\frac{\omega}{v}x} + \tilde{D} e^{-i\frac{\omega}{v}x} \right], \quad (87)$$

gdzie $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ i $\tilde{D}$ są zespolonymi amplitudami.

Powyższe równanie nie opisuje jednak zaburzenia rozchodzącego się ze stałą prędkością fazową $v_F = c$, z jaką rozchodzi się fala podłużna w pręcie. Można to uzasadnić w następujący sposób. Gdyby rozważyć jedynie jeden ze składników w równaniu (87) np.

$$\tilde{y}(x, t) = e^{i\omega t} \cdot \tilde{D} e^{-i\frac{\omega}{v}x} = \tilde{D} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right)}, \quad (88)$$

to część rzeczywista (88) przyjmuje postać

$$y(x, t) = D \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) = D \cos(\omega t - k^* x), \quad (89)$$

gdzie prędkość fazowa v_F^D rozchodzącego się powyższego zaburzenia to

$$v_F^D = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k^*} = \frac{\omega}{\left(\frac{\omega}{v}\right)} = v. \quad (90)$$

Zgodnie ze wzorem (78)

$$v_F^D = \sqrt{c\chi\omega}. \quad (91)$$

Oznacza to, że zaburzeniom o różnych częstościach ω odpowiadają różne prędkości rozchodzenia się stałej fazy. Wynika stąd, że zaburzenie poprzeczne w pręcie (w odróżnieniu od zaburzenia podłużnego) podlega zjawisku dyspersji.

Wykorzystując tożsamości trygonometryczne

$$e^{\pm\alpha} = \cosh \alpha \pm \sinh \alpha \quad (92)$$

oraz wzory Eulera

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \quad (93)$$

można ograniczyć równanie (87) do przestrzeni rzeczywistej i wówczas

$$y(x, t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (94)$$

gdzie stałe Γ_0 , A , B , C i D są już teraz amplitudami rzeczywistymi. Oznacza to, że zgodnie ze wzorami (69) i (76)

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (95)$$

oraz

$$\Psi(x) = \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right]. \quad (96)$$

Można sprawdzić, że faktycznie równanie (94) jest rozwiązaniem równania (68) opisującego rozchodzenie się drgań poprzecznych w pręcie. Druga pochodna y po czasie t wynosi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot \Psi(x) = -\omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x). \quad (97)$$

Kolejne pochodne cząstkowe y po x wynoszą

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right) \left[A \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) - C \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (98)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) - C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) - D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (99)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^3 \left[A \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) - D \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (100)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right]. \quad (101)$$

Widać, że

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x). \quad (102)$$

Po podstawieniu zależności (97) i (102) do (68) oraz uwzględniając wzór (78)

$$-\omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x) + (c\chi)^2 \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x) = \omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x) \left[\left(\frac{c\chi\omega}{v^2}\right)^2 - 1 \right] = 0. \quad (103)$$

To potwierdza, że funkcja $y(x, t)$ opisana równaniem (94) jest rozwiązaniem równania (68) opisującego rozchodzenie się drgań poprzecznych w pręcie.

Pozostaje problem wyznaczenia amplitud A , B , C i D . Z warunków granicznych wynika, że na końcach pręta nie występują ani momenty sił ani siły ścinające. Oznacza to, że w początku pręta, dla $x = 0$ moment siły $M(x = 0) = 0$ oraz $T(x = 0) = 0$. Stąd w oparciu o wzory (52) i (55)

$$M(x = 0) = EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (104)$$

Ale wobec związków (99) i (104)

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 [A \cosh(0) + B \sinh(0) - C \cos(0) - D \sin(0)] = 0. \quad (105)$$

Wynika stąd, że

$$A - C = 0, \quad (106)$$

czyli

$$A = C. \quad (107)$$

Z kolei w oparciu o wzór (56)

$$T(x = 0) = EJ \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = 0. \quad (108)$$

Czyli po zastosowaniu zależności (100) i wobec (108)

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 [A \sinh(0) + B \cosh(0) + C \sin(0) - D \cos(0)] = 0. \quad (109)$$

Wynika stąd, że

$$B - D = 0, \quad (110)$$

czyli

$$B = D. \quad (111)$$

Oznacza to, że równanie (94) przyjmuje postać

$$y(x, t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \left\{ A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}. \quad (112)$$

Wobec tego, druga i trzecia pochodna cząstkowa y po x , zgodnie ze wzorem (112), opisane są wzorami

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \left\{ A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}, \quad (113)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 \left\{ A \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}. \quad (114)$$

Stąd, wiedząc, że dla drugiego swobodnego końca pręta (czyli dla $x = L$) moment siły i siła ścinająca są również równe zero, to

$$M(x = L) = EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=L} = 0, \quad (115)$$

czyli

$$\Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \left\{ A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] + B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \right\} = 0, \quad (116)$$

a także

$$T(x = L) = EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=L} = 0, \quad (117)$$

czyli

$$\Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 \left\{ A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] + B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \right\} = 0. \quad (118)$$

Z równań (116) i (118) wynika, że

$$A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] = -B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \quad (119)$$

oraz

$$A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] = -B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]. \quad (120)$$

Należy wyznaczyć takie częstotliwości ω , dla których równania (119) i (120) są równoważne. W tym celu najpierw należy pozbyć się amplitud A i B dzieląc stronami powyższe równania

$$\frac{A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}{A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]} = \frac{-B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}{-B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}. \quad (121)$$

Stąd

$$\frac{\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right)}{\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right)} = \frac{\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right)}{\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right)}. \quad (122)$$

Mnożąc wyrażenia we wzorze (122) na krzyż

$$\left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]^2 = \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \cdot \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]. \quad (123)$$

Stąd

$$\cosh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - 2 \cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \cos^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) = \sinh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right), \quad (124)$$

czyli

$$\cosh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sinh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - 2 \cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \cos^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) = 0. \quad (125)$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych

$$\cosh^2(\Theta) - \sinh^2(\Theta) = 1 \quad (126)$$

oraz

$$\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta) = 1, \quad (127)$$

równanie (125) można przepisać w postaci

$$1 - 2 \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) + 1 = 0. \quad (128)$$

Stąd

$$\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) = 1. \quad (129)$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci

$$\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right)} = 0. \quad (130)$$

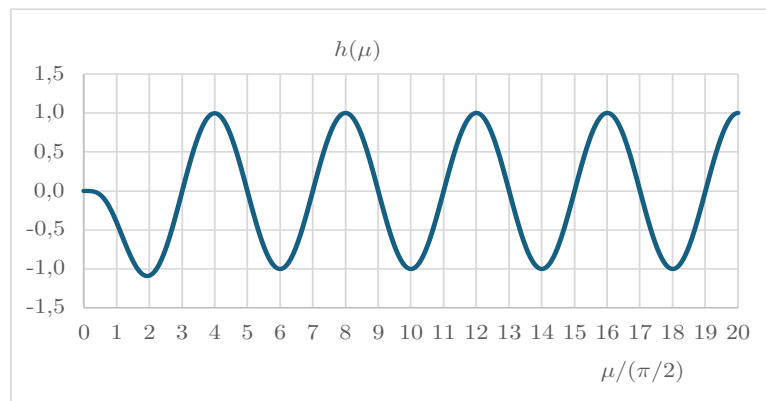
Niech zmienną μ definiuje wzór

$$\mu = \frac{\omega}{v}L. \quad (131)$$

Gdyby wprowadzić funkcję h zmiennej μ zdefiniowaną jako

$$h(\mu) = \cos(\mu) - \frac{1}{\cosh(\mu)}, \quad (132)$$

to wykres tej funkcji można przedstawić jak na rysunku 17.



Rysunek 17. Wykres funkcji $h(\mu)$

Źródło: opracowanie własne.

Z wykresu funkcji $h(\mu)$ wynika, że przyjmuje ona wartości równe zero dla argumentów μ zebranych w tabeli 1.

Tabela 1. Argumenty μ , dla których funkcja $h(\mu)$ przyjmuje wartości równe zero. Pierwiastki funkcji $h(\mu)$ wyznaczono numerycznie przy pomocy procedury Szukaj wyniku w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

i	$\mu_i/(\pi/2)$
1	3,011237462
2	4,999505341
3	7,000021359
4	8,999999077
5	11,00000004
6	13,00000000
7	15,00000000
8	17,00000000

Źródło: opracowanie własne.

Z wykresu widać wyraźnie, że wraz ze wzrostem wartości argumentów zanika wkład funkcji cosinus hiperboliczny ($\cosh$) i dominuje funkcja cosinus ($\cos$).

Kolejne częstotliwości ω_i dla których zależności (119) i (120) są sobie równoważne spełniają równania

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_1 L}{v_1} &= \frac{\pi}{2} \times 3,011237462, \\
 \frac{\omega_2 L}{v_2} &= \frac{\pi}{2} \times 4,999505341, \\
 \frac{\omega_3 L}{v_3} &= \frac{\pi}{2} \times 7,000021359, \\
 \frac{\omega_4 L}{v_4} &= \frac{\pi}{2} \times 8,999999077, \text{ itd.}
 \end{aligned} \tag{133}$$

Oznacza to, że wykorzystując wzór (78), częstotliwości f_i z jakimi może drgać pręt opisują równania

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (3,011237462)^2, \\
 f_2 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (4,999505341)^2, \\
 f_3 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (7,000021359)^2, \\
 f_4 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (8,999999077)^2, \text{ itd.}
 \end{aligned} \tag{134}$$

Kolejne częstotliwości mają się do siebie (w przybliżeniu do czterech miejsc po przecinku) jak

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : \dots = 1 : 2,7565 : 5,4039 : 8,9330 : \dots \tag{135}$$

Oznacza to, że kolejne częstotliwości nie są harmonicznymi częstotliwościami podstawowej f_1 , czyli nie są wielokrotnościami częstotliwości podstawowej f_1 .

Dla każdego modu drgania pręta (czyli sposobu jego drgań) zaburzenie w pręcie rozchodzi

się z inną prędkością fazową. Wykorzystując wzór (78) prędkości te opisują równania

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 3,011237462, \\ v_2 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 4,999505341, \\ v_3 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 7,000021359, \\ v_4 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 8,999999077, \text{ itd.} \end{aligned} \quad (136)$$

Kolejne prędkości mają się do siebie (w przybliżeniu do czterech cyfr po przecinku) jak

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 : \dots = 1 : 1,6603 : 2,3246 : 2,9889 : \dots \quad (137)$$

Do równania (125) można dojść jeszcze w inny, równoważny sposób. Równania (119) i (120) tworzą układ dwóch równań jednorodnych z dwiema niewiadomymi A i B

$$\begin{cases} A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] = 0, \\ A \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] + B \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] = 0. \end{cases} \quad (138)$$

Najprostsze rozwiązania tego równania to $A = 0$ i $B = 0$. Tyle, że wtedy zgodnie z równaniami (94), (107) i (111) $y = 0$ dla każdego x w dowolnej chwili czasu – co oznacza brak drgania pręta. Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (138) jest zerowanie się wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) & \sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \\ \sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) & \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (139)$$

co prowadzi do związku (123).

Rozwiązanie równania (129) umożliwia uzyskanie zbioru $\omega_i \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots\}$, którego cztery pierwsze wyrazy to ω_i występujące w równaniach (133). Każdemu ω_i odpowiada para niezerowych amplitud $A^{(i)}$ oraz $B^{(i)}$ spełniających równanie

$$\begin{cases} A^{(i)} \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] + B^{(i)} \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] = 0, \\ A^{(i)} \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) + \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] + B^{(i)} \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] = 0. \end{cases} \quad (140)$$

Gdyby przyjąć, że $A^{(i)}$ jest znane to wówczas z dowolnego z równań (140) można wyznaczyć $B^{(i)}$. Na przykład wykorzystując pierwsze z równań (140)

$$B^{(i)} = - \frac{\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right)}{\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right)} A^{(i)}. \quad (141)$$

Wówczas równanie (112) przyjmuje postać

$$y(x, t) = A^{(i)} \cdot \cos(\omega_i t + \phi) \cdot \left\{ \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) + \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) \right] - \left[\frac{\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right)}{\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right)} \right] \cdot \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) + \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) \right] \right\}. \quad (142)$$

Amplituda $A^{(i)}$ zależy od warunków początkowych.

Niech np. $L = 1$ m. Wówczas zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_1 = v_1 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 3,011237462 \text{ s}^{-1} \quad (143)$$

oraz

$$\frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\pi}{2L} \times 3,011237462 \cong 4,73 \text{ m}^{-1}. \quad (144)$$

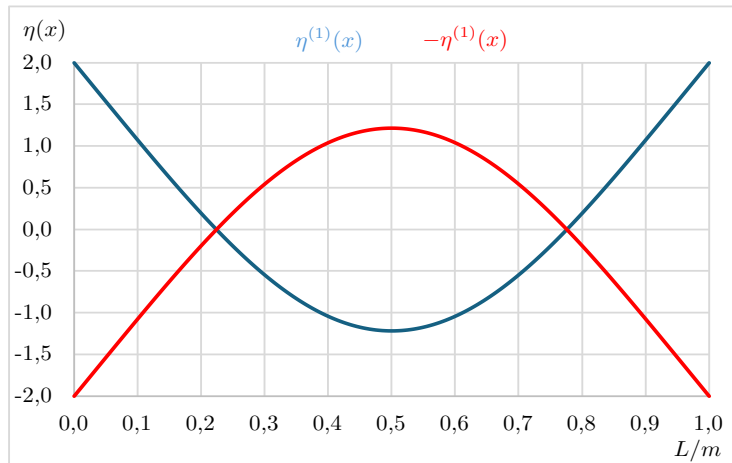
Równanie (142) przyjmuje wówczas postać

$$y(x, t) = A^{(1)} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(4,73x) + \cos(4,73x)] - \left[\frac{\cosh(4,73) - \cos(4,73)}{\sinh(4,73) - \sin(4,73)} \right] \cdot [\sinh(4,73x) + \sin(4,73x)] \right\}. \quad (145)$$

Można zdefiniować funkcję $\eta^{(1)}(x)$

$$\eta^{(1)}(x) = [\cosh(4,73x) + \cos(4,73x)] - 0,9825 \cdot [\sinh(4,73x) + \sin(4,73x)]. \quad (146)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(1)}(x)$ oraz $-\eta^{(1)}(x)$ przedstawiono na rysunku 18.



Rysunek 18. Wykresy funkcji $\eta^{(1)}(x)$ oraz $-\eta^{(1)}(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Z wykresów widać, że strzałka drgań pręta występuje w jego środku (dla $x_s^{(1)} = 0,500$ m). Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(1)} \cong 0,224$ m oraz dla $x_{w_2}^{(1)} \cong 0,776$ m. Taki sposób drgania pręta nazywa się modem podstawowym drgań poprzecznych.

Gdyby utrzymać założenie, że $L = 1$ m to dla drugiego modu drgań, zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 4,999505341 \text{ s}^{-1} \quad (147)$$

oraz

$$\frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\pi}{2L} \times 4,999505341 \cong 7,85 \text{ m}^{-1}. \quad (148)$$

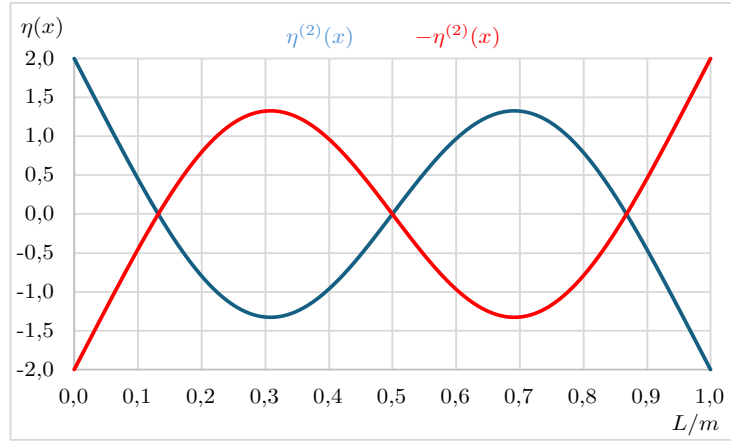
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(2)} \cdot \cos(\omega_2 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(7,85x) + \cos(7,85x)] - \left[\frac{\cosh(7,85) - \cos(7,85)}{\sinh(7,85) - \sin(7,85)} \right] \cdot [\sinh(7,85x) + \sin(7,85x)] \right\}. \quad (149)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(2)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(2)}(x) = [\cosh(7,85x) + \cos(7,85x)] - 1,0008 \cdot [\sinh(7,85x) + \sin(7,85x)]. \quad (150)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(2)}(x)$ oraz $-\eta^{(2)}(x)$ przedstawiono na rysunku 19.



Rysunek 19. Wykresy funkcji $\eta^{(2)}(x)$ oraz $-\eta^{(2)}(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(2)} \cong 0,308$ m oraz $x_{s_2}^{(2)} \cong 0,692$ m. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(2)} \cong 0,132$ m, $x_{w_2}^{(2)} \cong 0,500$ m oraz dla $x_{w_3}^{(2)} \cong 0,868$ m.

Dla trzeciego modu drgań, zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_3 = v_3 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 7,000021359 \text{ s}^{-1} \quad (151)$$

oraz

$$\frac{\omega_3}{v_3} = \frac{\pi}{2L} \times 7,000021359 \cong 11,00 \text{ m}^{-1}. \quad (152)$$

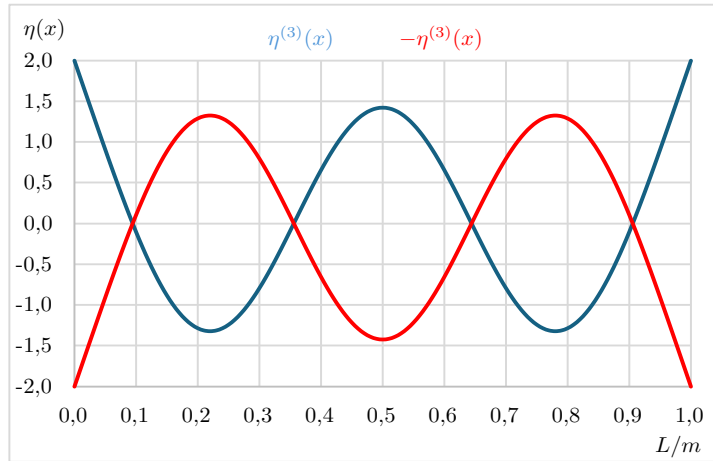
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(3)} \cdot \cos(\omega_3 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(11x) + \cos(11x)] - \left[\frac{\cosh(11) - \cos(11)}{\sinh(11) - \sin(11)} \right] \cdot [\sinh(11x) + \sin(11x)] \right\}. \quad (153)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(3)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(3)}(x) = [\cosh(11x) + \cos(11x)] - 1,0000 \cdot [\sinh(11x) + \sin(11x)]. \quad (154)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(3)}(x)$ oraz $-\eta^{(3)}(x)$ przedstawiono na rysunku 20.



Rysunek 20. Wykresy funkcji $\eta^{(3)}(x)$ oraz $-\eta^{(3)}(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(3)} \cong 0,220 \text{ m}$, $x_{s_2}^{(3)} \cong 0,500 \text{ m}$ oraz $x_{s_3}^{(3)} \cong 0,780 \text{ m}$. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(3)} \cong 0,094 \text{ m}$, $x_{w_2}^{(3)} \cong 0,356 \text{ m}$, $x_{w_3}^{(3)} \cong 0,644 \text{ m}$ oraz dla $x_{w_4}^{(3)} \cong 0,906 \text{ m}$.

Dla czwartego modu drgań, zgodnie z zależnością (133)

$$\omega_4 = v_4 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 8,999999077 \text{ s}^{-1} \quad (155)$$

oraz

$$\frac{\omega_4}{v_4} = \frac{\pi}{2L} \times 8,999999077 \cong 14,14 \text{ m}^{-1}. \quad (156)$$

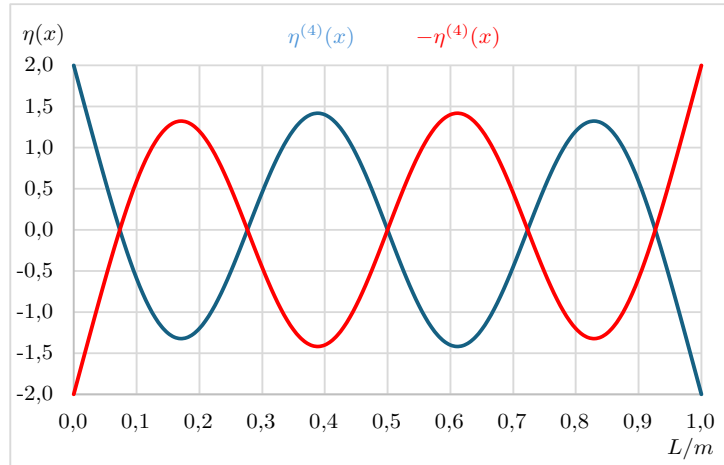
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(4)} \cdot \cos(\omega_4 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(14,14x) + \cos(14,14x)] - \left[\frac{\cosh(14,14) - \cos(14,14)}{\sinh(14,14) - \sin(14,14)} \right] \cdot [\sinh(14,14x) + \sin(14,14x)] \right\}. \quad (157)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(4)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(4)}(x) = [\cosh(14,14x) + \cos(14,14x)] - 1,0000 \cdot [\sinh(14,14x) + \sin(14,14x)]. \quad (158)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(4)}(x)$ oraz $-\eta^{(4)}(x)$ przedstawiono na rysunku 21.



Rysunek 21. Wykresy funkcji $\eta^{(4)}(x)$ oraz $-\eta^{(4)}(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(4)} \approx 0,171 \text{ m}$, $x_{s_2}^{(4)} \approx 0,389 \text{ m}$, $x_{s_3}^{(4)} \approx 0,611 \text{ m}$ oraz $x_{s_4}^{(4)} \approx 0,829 \text{ m}$. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(4)} \approx 0,073 \text{ m}$, $x_{w_2}^{(4)} \approx 0,277 \text{ m}$, $x_{w_3}^{(4)} \approx 0,500 \text{ m}$, $x_{w_4}^{(4)} \approx 0,723 \text{ m}$ oraz dla $x_{w_5}^{(4)} \approx 0,927 \text{ m}$.

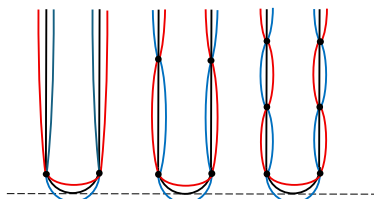
W analogiczny sposób można przedstawiać kolejne mody drgań. Z wykresów na rysunkach od 18 do 21 wynika, że o sposobie drgania pręta decyduje sposób jego podparcia. Dobierając punkty podparcia tak, aby znajdowały się one w miejscach położenia węzłów dla poszczególnych modów, można wybrać konkretny poprzeczny mod drgania. Charakterystyczne jest to, że dla poprzecznych modów będących nieparzystymi wielokrotnościami modu podstawowego w środku pręta występują strzałki. Dla parzystych wielokrotności poprzecznego modu podstawowego w środku pręta pojawia się węzeł.

Wykorzystując drgający pręt jako źródło dźwięku podpira się go w węzłach poprzecznego modu podstawowego przedstawionego na rysunku 18. Między innymi z powodu tego, że węzły pozostałych modów znajdują się w innych miejscach niż dla modu podstawowego, mody wyższych rzędów są silnie tłumione. Stanowi to jeden z podstawowych powodów wykorzystania podpartych prętów drewnianych lub metalowych do budowy melodycznych idiofonów sztabkowych czyli instrumentów perkusyjnych typu ksylofon, marimba (drewniane pręty) czy dzwonki, wibrafon, celesta (metalowe pręty).

Drgający poprzecznie pręt można *jakościowo* wykorzystać do wyjaśnienia działania kamertonu. Dla podstawowego modu poprzecznego drgań pręta, w środku pręta jest strzałka. Wygięcie pręta w kształcie litery U oraz dołączenie w środku pręta stopy powoduje, że węzły takiego drgania zbliżają się do środka pręta [2]. Niemniej stopa kamertonu silnie drga. O częstotliwości drgań kamertonu, podobnie jak pręta, decydują zgodnie ze wzorami (133) i (78):

1. materiał, z jakiego wykonano pręt – gęstość objętościowa ρ_V oraz moduł Younga E wpływają na wartość prędkości $c = v_F$ drgań podłużnych w pręcie;
2. założenia konstrukcyjne:
 - (a) długość ramion kamertonu – ok. $L/2$,
 - (b) typ przekroju poprzecznego pręta z jakiego wykonany jest pręt – współczynnik χ jako funkcja S pola przekroju pręta oraz J momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Uderzenie młoteczkiem w jedno z ramion kamertonu pobudza w nim drgania złożone z wielu drgań nieharmonicznych, schematycznie przedstawionych na rysunku 22.



Rysunek 22. Schematyczne drgania ramion kamertonu dla kilku pierwszych drgań nieharmonicznych

Źródło: opracowanie własne.

Wraz z upływem czasu wyższe nieharmoniczne drgania zanikają i pozostaje prawie tylko drganie podstawowe. Ewidentnie pomaga w tym pudło rezonansowe, którego konstrukcja preferuje drganie o częstotliwości podstawowej. Pudło wzmacnia i wydłuża czas działania kamertonu [1].

3. PODSUMOWANIE

Przedstawiony w pracy opis drgań podłużnych i poprzecznych pręta pokazuje, że w przypadku wykorzystania drgającego pręta, jako elementu będącego źródłem fal mechanicznych w powietrzu decydujące znaczenie ma sposób zamocowania pręta oraz sposób pobudzania pręta do drgań.

Podłużne drgania pręta znalazły między innymi zastosowanie w tzw. rurze Kundta, gdzie warunkiem wzbudzenia drgań pręta są:

- (a) zamocowanie pręta na sztywno (w jednym miejscu pośrodku lub w dwóch miejscach) tak, aby na jego końcach powstała strzałka;
- (b) przesuwanie z niewielkim naciskiem szmatki nasączonej kalafonią (sproszkowaną mieszaniną kwasów żywicznych, służącą do zwiększenia szorstkości materiału szmatki, co skutkuje wzrostem przyczepności szmatki do podłoża) wzdłuż pręta w celu wzbudzenia w nim drgań podłużnych.

Modele drgań poprzecznych pręta opisują działanie szeregu instrumentów idiofonicznych takich jak

- dzwonki, ksylofony itp., gdzie źródłem dźwięku jest swobodny, jedynie podparty pręt;
- harmonijka ustna czy akordeon, gdzie źródłem dźwięku jest tzw. stroik – czyli zamocowany na jednym końcu drgający pręt wprowadzany w ruch przez powietrze – stąd często ten typ instrumentów przypisany jest do tzw. aerofonów.

Próba wykorzystania opisu drgań podłużnych pręta do wyjaśnienia działania kamertonu, czyli źródła dźwięku o zadanej częstotliwości jest całkowicie błędna głównie z dwóch powodów:

- (a) pręt (zgięty) w kamertonie nie jest w żadnym ustalonym miejscu sztywno zamocowany i dlatego nieuprawnione wydaje się założenie, że jego drgania to drgania podłużne;
- (b) sposób wzbudzania drgań polega na uderzeniu młoteczkiem w jedno z ramion kamertonu – czyli wytworzeniu w kamertonie fali poprzecznej.

Niemniej, dokładny model drgań kamertonu wymaga uwzględnienia między innymi:

- (a) niejednorodności rozkładu masy drgającego pręta, wynikającej zarówno z dołączenia do niego stopy jak i ewentualnego zastosowania dodatkowych przesuwanych mas na ramionach kamertonu w celu niewielkiej korekty podstawowej częstotliwości jego drgań;
- (b) drgań skrętnych ramion kamertonu,

co nie zostało rozważone w powyższej pracy.

LITERATURA

- [1] Golachowski S., Drobner M., *Akustyka Muzyczna*, Polskie Wydawnictwo Muzyczne, Kraków 1953.
- [2] Szczeniowski Sz., *Fizyka Doświadczalna, Część 1, Mechanika i Akustyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
- [3] Kurowski R., Niezgodziński M.E., *Wytrzymałość Materiałów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965.
- [4] Leja F., *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.
- [5] Kinsler L.E., *Fundamentals of Acoustic*, John Wiley & Sons, Nowy Jork–Londyn 1962.