

ADAM CHUDECKI^{*1,2}, JANUSZ TOMASZEWSKI^{†1}, PIOTR SŁOMA^{‡1}

RÓWNANIA TRZECIEGO STOPNIA W DYDAKTYCE FIZYKI

¹ Centre of Mathematics and Physics, Lodz University of Technology, Al. Politechniki 11, 93-590 Łódź, Poland² Institute of Physics, Lodz University of Technology, ul. Wólczańska 219, 90-924 Łódź, Poland

W artykule dyskutujemy przydatność równań trzeciego stopnia w izyce poziomu szkoły średniej i pierwszego roku studiów wyższych technicznych. Doświadczenia dydaktyczne wskazują, że metody rozwiązywania takich równań nie są szczegółowo przedstawiane uczniom i studentom. Ten stan rzeczy usprawiedliwia się twierdząc, że równania trzeciego stopnia pojawiają się raczej w zaawansowanych zagadnieniach. Polemizujemy z tą tezą analizując dwa, dość elementarne przykłady.

Keywords: równania stopnia trzeciego, równania sześciennne, wzory Cardano.

1. WSTĘP

1.1. Równania trzeciego stopnia

Ogólne równanie stopnia trzeciego ma postać,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (1)$$

gdzie a, b, c i d to współczynniki rzeczywiste bądź zespolone, a x to zmienna (również rzeczywista, bądź zespolona). Zakłada się, że współczynnik $a \neq 0$, w przeciwnym razie równanie (1) staje się równaniem stopnia drugiego, którego sposoby na rozwiązanie znane były od starożytności.

Historia równań trzeciego stopnia sięga zamierzchłej historii starożytnego Babilonu, Egiptu i Grecji [1]. Jednak dopiero w XVI wieku udało się skompletować metodę ich rozwiązywania. Zawdzięczamy to wybitnym matematykom tamtych czasów, wśród których wymienić należy takich uczonych, jak: Scipio del Ferro, Antonio Mario Fiori, Niccolo Tartaglia i Girolamo Cardano. Fascynującej historii odkrycia sposobu na rozwiązywanie równań trzeciego stopnia, matematycznych „pojedyneków na zadania”, przekazywanych w zaufaniu formuł i - wreszcie - „zdrady”, o jaką Cardano został przez Tartaglię oskarżony, nie będziemy tu przytaczać. Zainteresowanych odsyłamy do treściwego bloga P. Gładkiego [2].

Nie będziemy w szczególności przedstawiać algorytmu, który pozwala na znalezienie wszystkich pierwiastków równania trzeciego stopnia (wiadomo, że każde równanie trzeciego stopnia ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty). Przypomnijmy jedynie, że przez podstawienie:

$$x = y - \frac{b}{3a} \quad (2)$$

^{*}adam.chudecki@p.lodz.pl[†]janusz.tomaszewski@p.lodz.pl[‡]piotr.sloma@p.lodz.pl

równanie (1) redukuje się do tzw. postaci kanonicznej Cardano:

$$y^3 = 3py + 2q, \quad -3p := \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad -2q := \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}. \quad (3)$$

Równanie (3) może być rozwiązane przy pomocy tzw.: wzoru Cardano

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (4)$$

Szczegółową dyskusję stosowalności wzoru (4) można znaleźć w wielu pozycjach, np. w [3].

Wzór Cardano (4) pozwolił Rafaelowi Bombelliemu odkryć liczby zespolone (*Algebra*, 1572), których obecna rola w matematyce i fizyce jest nie do przecenienia. Otóż Bombelli zauważył, że nawet gdy $q^2 - p^3 < 0$, można ze wzoru Cardano uzyskać rozwiązanie rzeczywiste. Bombelli posłużył się przykładem $x^3 = 15x + 4$. Łatwo odgadnąć, że liczba 4 jest rozwiązaniem tego równania. Jednak wzór Cardano daje

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \quad (5)$$

gdzie $i^2 = -1$. Bombelli zaproponował algebraiczne reguły operacji na liczbach, które dziś nazywamy zespolonymi. Otrzymał

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i, \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i, \quad (6)$$

co w konsekwencji daje $x = 4$. W taki sposób odkryto liczby zespolone.

Zauważmy jeszcze, iż pośród wszystkich równań wielomianowych, ogólne metody ich rozwiązywania możliwe są do sformułowania jedynie dla stopni ≤ 4 . Rozwiązań równań stopnia piątego i wyższych nie da się już niestety określić w skończonej liczbie kroków, bazujących na wzorach zbudowanych ze współczynników równania i wykorzystujących cztery podstawowe działania arytmetyczne oraz pierwiastki stopni naturalnych. Dowodu tego niezwykłego faktu dostarcza tzw. twierdzenie Abela-Ruffiniego, szeroko omówione np. w [4].

1.2. Równania sześciennie w dydaktyce fizyki i matematyki

Doświadczenia zebrane przez autorów w trakcie pracy nauczyciela akademickiego dowodzą, że zagadnienie równań sześciennych (jak i równań czwartego stopnia), nie jest zagadnieniem szeroko poruszonym na ćwiczeniach z matematyki i fizyki. Równania wielomianowe stopni wyższych niż drugi rozwiązywane są już raczej na ćwiczeniach z metod numerycznych, gdzie odpowiednie pierwiastki znajduje się np. przy pomocy metody Newtona-Raphsona. Podejście takie usprawiedliwia się twierdząc, że równania sześciennie nie pojawiają się w zagadnieniach fizycznych poruszanych na lekcjach w szkole średniej i na wykładach na pierwszych latach studiów technicznych.

Nie jest to prawda. Faktycznie, problemy wymagające umiejętności rozwiązywania równań stopnia trzeciego nie są powszechne, ale z całą pewnością występują i to w zagadnieniach, których fizyczne podstawy nie wykraczają poza zakres szkoły średniej.

Jednym z najprostszych i najbardziej klasycznych problemów, w którym naturalnie pojawia się równanie sześciennie, jest zagadnienie dwóch, zawieszonych naprzeciwko siebie, jednoimiennie naładowanych kul. Odpowiednie zadania można znaleźć np. w kultowych już pozycjach pod redakcją M.S. Cedrika [5] i [6]. Ścisłe rozwiązanie takiego zagadnienia przedstawiamy w paragrafie 2.1. Bardziej wyrafinowanego przykładu dostarcza zagadnienie ruchu ciała w polu grawitacyjnym przy obecności stałych sił oporu powietrza – opisujemy je w paragrafie 2.2.

Wspomnijmy jeszcze, że z równaniem wielomianowym trzeciego stopnia spotkamy się także na gruncie termodynamiki. Omawiane na pierwszym roku studiów technicznych tzw. równanie Van der Waalsa stanu gazu rzeczywistego, zapisywane dla jednego mola tradycyjnie w następujący sposób:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT, \quad (7)$$

można przecież przekształcić do postaci:

$$pV_m^3 - (bp + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (8)$$

Jest ono zatem równaniem wielomianowym trzeciego stopnia ze względu na objętość molową. Biorąc pod uwagę rząd wielkości empirycznych współczynników a i b [7] oraz realne wartości ciśnienia p i temperatury T , otrzymamy zawsze jedno rozwiązanie rzeczywiste takiego równania (z uwagi na dodatni wyróżnik postaci kanonicznej). Mamy zatem np. możliwość obliczenia analitycznie objętości molowej gazu dla innych niż normalne warunków ciśnienia i temperatury.

2. PRZYKŁADY

2.1. Zadanie 1: dwie naładowane kulki

Klasyczny problem, w którym pojawia się równanie trzeciego stopnia, to problem dwóch naładowanych ciał. Rozważmy dwie małe metalowe kulki o jednakowych masach m powieszono na niciach o długości l , zaczepionych w tym samym punkcie. Kulki te początkowo stykają się ze sobą. Następnie dostarczamy im ładunek elektryczny $2q$, który rozkłada się na nich po równo, a w efekcie odpychanie kulombowskie rozdziela kulki tworząc z ich środków i punktu zawieszenia trójkąt równoramienny o podstawie x (rysunek 1). Zadanie polega na znalezieniu wspomnianej odległości x , na jaką kulki oddalą się od siebie.

W uproszczonym wariancie opisywanym przez Cedrika [5] przyjmuje się, że kąt rozwarcia nitek jest bardzo mały, wskutek czego otrzymuje się trywialne równanie trzeciego stopnia o rozwiązaniu

$$x = \sqrt[3]{\frac{2klq^2}{mg}}, \quad (9)$$

gdzie k to „stała” elektrostatyczna, zaś g to przyspieszenie ziemskie. W wariancie „bezkompromisowym” na podstawie rysunku 1 znajdujemy związki:

$$\sin \theta = \frac{x}{2l}, \quad \tan \theta = \frac{kq^2}{mgx^2}. \quad (10)$$

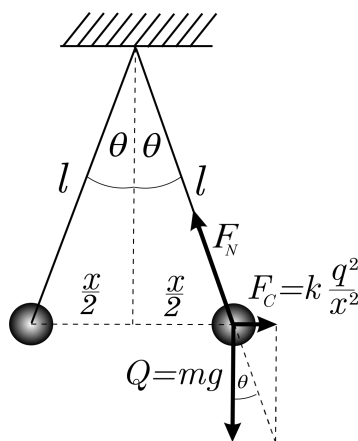
Eliminując z nich następnie kąt θ otrzymujemy równanie:

$$m^2g^2x^6 + k^2q^4(x^2 - 4l^2) = 0, \quad (11)$$

które można przekształcić do postaci:

$$ay^3 + y - 4 = 0, \quad a := \frac{m^2g^2l^4}{k^2q^4}, \quad y := \frac{x^2}{l^2}. \quad (12)$$

Równanie (12) ma jedno rzeczywiste rozwiązanie bez względu na wartość parametru a (jest to fizycznie jasne, jako że przedstawione zagadnienie może mieć tylko jedno rozwiązanie).



Rysunek 1. Dwie odpychające się kulki: Q – ciężar kulek, F_C – siła kulombowskiego odpychania między nimi, F_N – siła naciągu nici. W stanie równowagi wypadkowa sił działających na kulkę wynosi zero

Źródło: opracowanie własne.

Używając do jego rozwiązania dostępnych online narzędzi (np. [8]), dostajemy:

$$y = \frac{\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}{a\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}. \quad (13)$$

Nie mając dostępu do narzędzi bazujących na pakietach do obliczeń symbolicznych, uzyskanie rozwiązania (13) – bez znajomości wzoru Cardano – jest praktycznie niemożliwe.

Jeśli jednak znamy wzór Cardano, porównując (3) z (12) łatwo zauważyć, że $3p = -\frac{1}{a}$ oraz $2q = \frac{4}{a}$. Z (4) dostajemy

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{a} + \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{27a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{a} - \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{27a^3}}} \quad (14)$$

Oczywiście rozwiązania (13) i (14) są tożsame, co łatwo sprawdzić. Wracając do podstawienia ze wzorów (12) otrzymujemy odległość między kulkami:

$$x = l\sqrt{\frac{\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}{a\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}} \quad (15)$$

2.2. Zadanie 2: pionowy ruch małej kulki w polu grawitacyjnym ze stałymi oporami powietrza

W poprzednim przykładzie równanie trzeciego stopnia (12) zależało od jednego parametru rzeczywistego a , który mógł przyjmować dowolne wartości dodatnie. Na równanie trzeciego stopnia, zależne jedynie od ustalonych współczynników, natykamy się przy rozważaniu

zagadnienia ciała wyrzuconego pionowo w górę w polu grawitacyjnym przy obecności stałych sił oporu (pomińmy dyskusję, czy stała siła oporu powietrza zdarza się w realnych sytuacjach).

Sformułujmy zagadnienie: napisz równania na prędkość i drogę podczas ruchu „w górę” i „w dół” dla ciała wyrzuconego pionowo do góry z prędkością początkową o wartości v_0 ; wyznacz czas wznoszenia i opadania, prędkość w chwili uderzenia o podłoże i maksymalną wysokość, na którą ciało się wzniosło. Zadanie rozwiąż w dwóch przypadkach:

- przy braku oporów powietrza,
- jeśli opory powietrza przyjmują stałą wartość.

W drugim przypadku przebadaj zależność całkowitego czasu ruchu oraz wartości prędkości od wartości siły oporu powietrza.

2.2.1. Ruch bez oporu

Rozważmy najpierw przypadek bez oporu (rysunek 2 z $F=0$).

W pierwszej fazie ruchu „w górę” równanie II zasady dynamiki Newtona ma postać $ma_g = -mg$ z warunkami początkowymi $s(0)=0$, $v_g(0)=v_0$. W drugiej fazie ruchu „w dół” mamy $ma_d = mg$ o raz warunki początkowe $s(0)=0$, $v_d(0)=0$. Ruch jest ruchem jednostajnie zmiennym i łatwo znajdujemy zależności:⁴

$$\begin{aligned} v_g(t) &= v_0 - gt; & v_d(t) &= gt; \\ s_g(t) &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}; & s_d(t) &= \frac{gt^2}{2}; \end{aligned} \quad (16)$$

Kiedy ciało osiąga maksymalną wysokość H_0 , jego prędkość spada do zera. Oznaczając przez t_g czas wznoszenia, znajdujemy zależności:

$$t_g = \frac{v_0}{g}; \quad H_0 = \frac{v_0^2}{2g}; \quad (17)$$

W drugiej fazie ruchu, czyli w trakcie opadania w dół, ciało ma początkową prędkość równą zero. Spada z wysokości, na którą wcześniej się wzniosło, czyli z H_0 . Czas opadania t_d znajdujemy zatem z warunku $s_d(t_d) = H_0$, otrzymując:

$$t_d = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}. \quad (18)$$

Wykorzystując zależności (17) dostajemy

$$t_g = t_d. \quad (19)$$

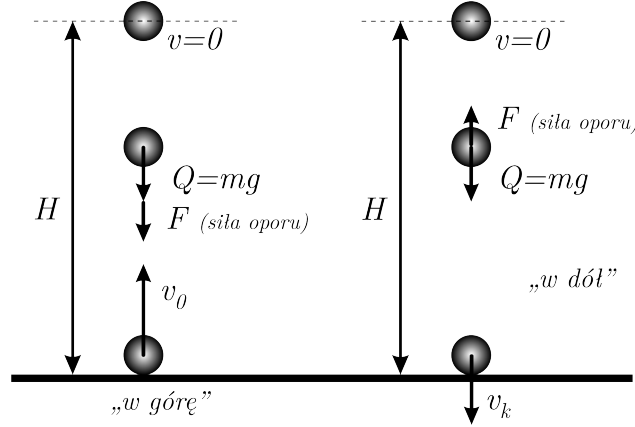
Prędkość uderzenia o podłoże $v_k = v_d(t_d)$, czyli

$$v_k = v_0. \quad (20)$$

Prędkość uderzenia o podłoże jest zatem równa prędkości, z jaką ciało zostało wyrzucone. To zrozumiałe, jako że brak oporów implikuje brak strat energii. Oznaczmy czas wznoszenia i czas opadania w przypadku braku oporów przez t_0 . A zatem

$$t_0 := \frac{v_0}{g} = t_g = t_d. \quad (21)$$

⁴ Będziemy używać indeksów „g” dla oznaczenia wielkości w trakcie ruchu „w górę” oraz „d” dla ruchu „w dół”.



Rysunek 2. Ruch ciała w górę i w dół
Źródło: opracowanie własne.

Całkowity czas ruchu

$$t_c = t_g + t_d = 2t_0. \quad (22)$$

2.2.2. Ruch ze stałym oporem

Rozważmy teraz sytuację, w której oprócz siły ciężkości działa siła oporu o stałej wartości $F \geq 0$, takiej samej podczas obu etapów ruchu (i zawsze przeciwnie skierowanej do chwilowej prędkości ciała). Równania ruchu mają teraz postać:

$$\begin{aligned} ma_g &= -mg - F \implies a_g = -g(1+x) \\ ma_d &= mg - F \implies a_d = g(1-x), \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie oznaczyliśmy $x := \frac{F}{mg}$. Zauważmy, że siła oporu musi być mniejsza od ciężaru ciała. W przeciwnym razie w trakcie spadania ciała mogłoby dojść do niefizycznej sytuacji, w której ciało pozostałoby nieruchome (lub w najlepszym przypadku spadało ruchem jednostajnym). Zakładamy zatem, że $F < mg$, czyli $x < 1$. Oczywiście, $x \geq 0$.

Stosując równania (23) znajdujemy

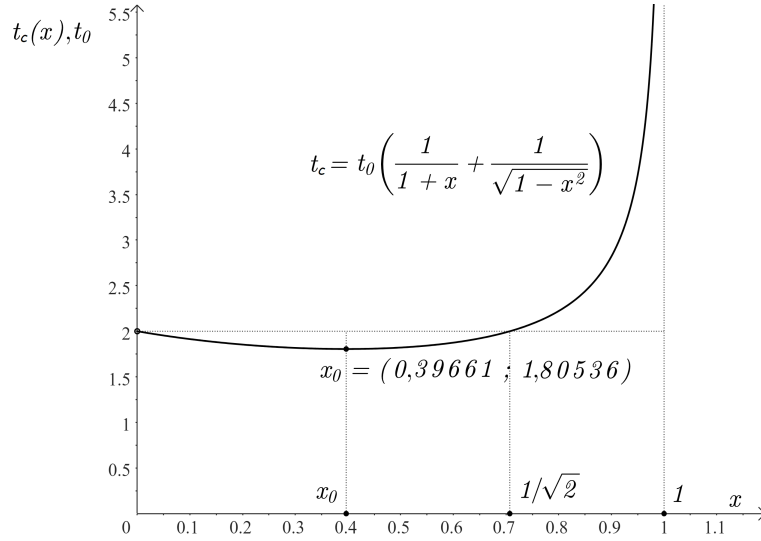
$$\begin{aligned} v_g(t) &= v_0 - (1+x)gt; & v_d(t) &= (1-x)gt; \\ s_g(t) &= v_0t - (1+x)\frac{gt^2}{2}; & s_d(t) &= (1-x)\frac{gt^2}{2}; \end{aligned} \quad (24)$$

Podobnie jak w przypadku ruchu bez oporu, łatwo znajdujemy czas wznoszenia, wiedząc, że $v_g(t_g) = 0$, co daje:

$$t_g = \frac{v_0}{g(1+x)} = \frac{t_0}{1+x}. \quad (25)$$

Po czasie t_g ciało wznosi się na wysokość $H = s_g(t_g)$, czyli:

$$H = \frac{1}{1+x} \frac{v_0^2}{2g} = \frac{H_0}{1+x}. \quad (26)$$

Rysunek 3. Wykres funkcji $t_c(x)$ *Źródło: opracowanie własne.*

Aby wyznaczyć czas opadania, wykorzystajmy fakt, że $s_d(t_d) = H$, skąd otrzymujemy

$$t_d = \frac{v_0}{g\sqrt{1-x^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (27)$$

Ciało uderza o podłoże z prędkością $v_k = v_d(t_d)$, co daje:

$$v_k = v_0 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (28)$$

Zauważmy, że $t_g < t_0 < t_d$. Dokładniej, zachodzi relacja

$$t_d = t_g \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (29)$$

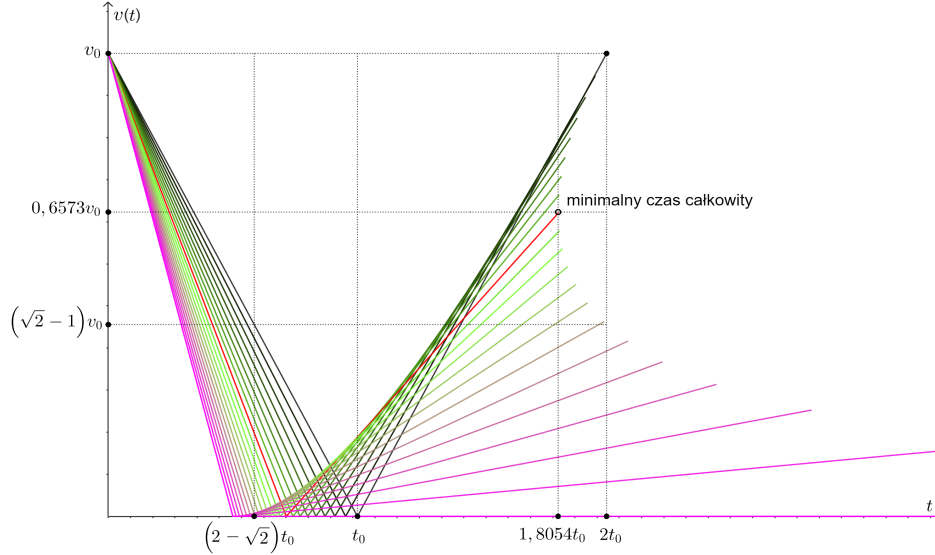
Czas całkowity wyraża się z kolei wzorem:

$$t_c(x) = t_0 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right). \quad (30)$$

Wykres funkcji $t_c(x)$ jest przedstawiony na Rysunku 3.

Z wykresu funkcji $t_c(x)$ widzimy, że dla pewnej wartości zmiennej x czas całkowity jest taki sam, jak w przypadku ruchu bez oporów. Aby znaleźć tę wartość, musimy rozwiązać równanie $t_c = 2t_0$, które daje:

$$x(1-2x^2) = 0 \quad (31)$$

Rysunek 4. Wykres prędkości w funkcji czasu $v(t)$

Źródło: opracowanie własne.

Równanie to ma trzy rozwiązania, z których pierwsze $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nie ma sensu fizycznego, drugie $x = 0$ odpowiada oczywistemu przypadkowi ruchu bez oporów, a trzecie, najbardziej nas interesujące, to $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem, jeśli siła oporu ma wartość $F = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$, czas ruchu jest dokładnie taki sam, jak w przypadku braku oporów. Oczywiście w takim przypadku ciało wznosi się na wysokość niższą niż H_0 , a dokładniej równą $H_0(2 - \sqrt{2})$, oraz uderza w podłoże z prędkością $(\sqrt{2} - 1)v_0$.

Teraz rozważmy zagadnienie, które doprowadzi nas do równania trzeciego stopnia. Zauważmy, że funkcja $t_c(x)$ ma minimum. Istnieje zatem taka wartość siły oporu, dla której całkowity czas ruchu jest najkrótszy. Minimum funkcji $t_c(x)$ znajdziemy przyrównując do zera jej pochodną. Dostajemy równanie:

$$2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0. \quad (32)$$

Równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty, równy

$$x_0 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{4 + 3\sqrt{78}}}{\sqrt[3]{4}} - \frac{7}{\sqrt[3]{2(4 + 3\sqrt{78})}} \right) \approx 0,39661. \quad (33)$$

Jest to interesujący wynik: jeśli siła oporu wynosi $F \approx 0,39661mg$, całkowity czas ruchu jest najkrótszy. Dokładniej, dla $x = x_0$ mamy:

$$t_g \approx 0,71602t_0, \quad t_d \approx 1,08934t_0, \quad t_c \approx 1,8054t_0, \quad v_k \approx 0,6573v_0, \quad H \approx 0,71602H_0 \quad (34)$$

Na rysunku 4 przedstawiony jest wykres wartości wektora prędkości w funkcji czasu dla kilku różnych wartości parametru x .

3. PODSUMOWANIE

Opisane w paragrafach 2.1 i 2.2 przykłady pokazują, że równania sześciennie pojawiają się nawet w prostych zagadnieniach fizycznych. Problem dwóch odpychających się kul to zadanie – na poziomie fizyki zagadnienie – stopniem trudności nie wykraczające poza ramy programu szkoły średniej. Jednak nawet takie zadanie stawia przed rozwiązującym je uczniem równanie stopnia trzeciego. Bez znajomości metody analitycznej lub bez dostępu do pakietów do obliczeń symbolicznych znalezienie rozwiązania (15) przez ucznia szkoły średniej lub nawet przez studenta pierwszego roku studiów technicznych jest, naszym zdaniem, niemożliwe. Podobnie jest z rozwiązaniem (33) bardziej wyrafinowanego problemu minimalnego czasu ruchu dla ciała poruszającego się w polu grawitacyjnym w obecności stałych sił oporu powietrza.

Podsumowując, warto podkreślić, że metodom rozwiązywania równań sześciennych powinno się poświęcać trochę więcej czasu, nawet jeśli nie na poziomie szkoły średniej, to przynajmniej na pierwszych latach studiów technicznych.

LITERATURA

- [1] van der Waerden B.L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [2] Gładki P., *Uwagi historyczne o wzorach Cardano*, online <http://www.math.us.edu.pl/pgladki/faq/node129.html> (dostęp: 21.10.2024).
- [3] Bronsztejn I.N., Siemiendajew K.A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 2019.
- [4] Ramond P., *Abel-Ruffini's Theorem: Complex but Not Complicated!*, "The American Mathematical Monthly" 2022, vol. 129, no. 3.
- [5] Cedrik M.S., *Ćwiczenia z fizyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, PWN, Warszawa 1974.
- [6] Cedrik M.S., *Zadania z fizyki*, PWN, Warszawa 1986.
- [7] Weast R.C., *Handbook of Chemistry and Physics (53rd Edn.)*, Chemical Rubber Company, Cleveland 1972.
- [8] Wolfram Alpha Widgets, *Solutions of cubic equations*, online <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55> (dostęp: 21.10.2024).