

Bulletin of Physics and Applied Mathematics

Edited by:

Adam Chudecki

TUL Press, Lodz, Poland

Bulletin of Physics and Applied Mathematics
<https://fizyka.p.lodz.pl/badania/biuletyn/>

Redaktor naczelny

dr hab. inż. Adam Chudecki

Kolegium redakcyjne

dr inż. Katarzyna Dems-Rudnicka
dr inż. Michał Dobrski
dr inż. Jacek Rogowski
dr inż. Piotr Słoma
dr inż. Janusz Tomaszewski

© Copyright by Politechnika Łódzka 2025

ISSN 3072-2519

DOI:

10.34658/bpam.2025.1

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52

e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl

www.wydawnictwo.p.lodz.pl

Spis treści:***A. Chudecki, J. Tomaszewski, P. Słoma***

Równania trzeciego stopnia w dydaktyce fizyki..... 5

J. Kucner, B. Świątek

O pewnym równaniu w zbiorze liczb zespolonych 15

M. Wasiak

An Analysis of the Theory of Transfer Length Method 21

P. Górski, M. Dłużniewski

Drgania swobodnego pręta jako wstęp do opisu drgań kamertonu 33

Ł. PiskorskiModelowanie azotkowych laserów o emisji krawędziowej,
w których zastosowano podejście supersymetryczne..... 61

ADAM CHUDECKI^{*1,2}, JANUSZ TOMASZEWSKI^{†1}, PIOTR SŁOMA^{‡1}

RÓWNANIA TRZECIEGO STOPNIA W DYDAKTYCE FIZYKI

¹ Centre of Mathematics and Physics, Lodz University of Technology, Al. Politechniki 11, 93-590 Łódź, Poland² Institute of Physics, Lodz University of Technology, ul. Wólczańska 219, 90-924 Łódź, Poland

W artykule dyskutujemy przydatność równań trzeciego stopnia w izyce poziomu szkoły średniej i pierwszego roku studiów wyższych technicznych. Doświadczenia dydaktyczne wskazują, że metody rozwiązywania takich równań nie są szczegółowo przedstawiane uczniom i studentom. Ten stan rzeczy usprawiedliwia się twierdząc, że równania trzeciego stopnia pojawiają się raczej w zaawansowanych zagadnieniach. Polemizujemy z tą tezą analizując dwa, dość elementarne przykłady.

Keywords: równania stopnia trzeciego, równania sześciennne, wzory Cardano.

1. WSTĘP

1.1. Równania trzeciego stopnia

Ogólne równanie stopnia trzeciego ma postać,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (1)$$

gdzie a, b, c i d to współczynniki rzeczywiste bądź zespolone, a x to zmienna (również rzeczywista, bądź zespolona). Zakłada się, że współczynnik $a \neq 0$, w przeciwnym razie równanie (1) staje się równaniem stopnia drugiego, którego sposoby na rozwiązanie znane były od starożytności.

Historia równań trzeciego stopnia sięga zamierzchłej historii starożytnego Babilonu, Egiptu i Grecji [1]. Jednak dopiero w XVI wieku udało się skompletować metodę ich rozwiązywania. Zawdzięczamy to wybitnym matematykom tamtych czasów, wśród których wymienić należy takich uczonych, jak: Scipio del Ferro, Antonio Mario Fiori, Niccolo Tartaglia i Girolamo Cardano. Fascynującej historii odkrycia sposobu na rozwiązywanie równań trzeciego stopnia, matematycznych „pojedyneków na zadania”, przekazywanych w zaufaniu formuł i - wreszcie - „zdrady”, o jaką Cardano został przez Tartaglię oskarżony, nie będziemy tu przytaczać. Zainteresowanych odsyłamy do treściwego bloga P. Gładkiego [2].

Nie będziemy w szczególności przedstawiać algorytmu, który pozwala na znalezienie wszystkich pierwiastków równania trzeciego stopnia (wiadomo, że każde równanie trzeciego stopnia ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty). Przypomnijmy jedynie, że przez podstawienie:

$$x = y - \frac{b}{3a} \quad (2)$$

^{*}adam.chudecki@p.lodz.pl

[†]janusz.tomaszewski@p.lodz.pl

[‡]piotr.sloma@p.lodz.pl

równanie (1) redukuje się do tzw. postaci kanonicznej Cardano:

$$y^3 = 3py + 2q, \quad -3p := \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad -2q := \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}. \quad (3)$$

Równanie (3) może być rozwiązane przy pomocy tzw.: wzoru Cardano

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (4)$$

Szczegółową dyskusję stosowalności wzoru (4) można znaleźć w wielu pozycjach, np. w [3].

Wzór Cardano (4) pozwolił Rafaelowi Bombelliemu odkryć liczby zespolone (*Algebra*, 1572), których obecna rola w matematyce i fizyce jest nie do przecenienia. Otóż Bombelli zauważył, że nawet gdy $q^2 - p^3 < 0$, można ze wzoru Cardano uzyskać rozwiązanie rzeczywiste. Bombelli posłużył się przykładem $x^3 = 15x + 4$. Łatwo odgadnąć, że liczba 4 jest rozwiązaniem tego równania. Jednak wzór Cardano daje

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}, \quad (5)$$

gdzie $i^2 = -1$. Bombelli zaproponował algebraiczne reguły operacji na liczbach, które dziś nazywamy zespolonymi. Otrzymał

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i, \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i, \quad (6)$$

co w konsekwencji daje $x = 4$. W taki sposób odkryto liczby zespolone.

Zauważmy jeszcze, iż pośród wszystkich równań wielomianowych, ogólne metody ich rozwiązywania możliwe są do sformułowania jedynie dla stopni ≤ 4 . Rozwiązań równań stopnia piątego i wyższych nie da się już niestety określić w skończonej liczbie kroków, bazujących na wzorach zbudowanych ze współczynników równania i wykorzystujących cztery podstawowe działania arytmetyczne oraz pierwiastki stopni naturalnych. Dowodu tego niezwykłego faktu dostarcza tzw. twierdzenie Abela-Ruffiniego, szeroko omówione np. w [4].

1.2. Równania sześciennie w dydaktyce fizyki i matematyki

Doświadczenia zebrane przez autorów w trakcie pracy nauczyciela akademickiego dowodzą, że zagadnienie równań sześciennych (jak i równań czwartego stopnia), nie jest zagadnieniem szeroko poruszonym na ćwiczeniach z matematyki i fizyki. Równania wielomianowe stopni wyższych niż drugi rozwiązywane są już raczej na ćwiczeniach z metod numerycznych, gdzie odpowiednie pierwiastki znajduje się np. przy pomocy metody Newtona-Raphsona. Podejście takie usprawiedliwia się twierdząc, że równania sześciennie nie pojawiają się w zagadnieniach fizycznych poruszanych na lekcjach w szkole średniej i na wykładach na pierwszych latach studiów technicznych.

Nie jest to prawda. Faktycznie, problemy wymagające umiejętności rozwiązywania równań stopnia trzeciego nie są powszechne, ale z całą pewnością występują i to w zagadnieniach, których fizyczne podstawy nie wykraczają poza zakres szkoły średniej.

Jednym z najprostszych i najbardziej klasycznych problemów, w którym naturalnie pojawia się równanie sześciennie, jest zagadnienie dwóch, zawieszonych naprzeciwko siebie, jednoimiennie naładowanych kul. Odpowiednie zadania można znaleźć np. w kultowych już pozycjach pod redakcją M.S. Cedrika [5] i [6]. Ścisłe rozwiązanie takiego zagadnienia przedstawiamy w paragrafie 2.1. Bardziej wyrafinowanego przykładu dostarcza zagadnienie ruchu ciała w polu grawitacyjnym przy obecności stałych sił oporu powietrza – opisujemy je w paragrafie 2.2.

Wspomnijmy jeszcze, że z równaniem wielomianowym trzeciego stopnia spotkamy się także na gruncie termodynamiki. Omawiane na pierwszym roku studiów technicznych tzw. równanie Van der Waalsa stanu gazu rzeczywistego, zapisywane dla jednego mola tradycyjnie w następujący sposób:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT, \quad (7)$$

można przecież przekształcić do postaci:

$$pV_m^3 - (bp + RT)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (8)$$

Jest ono zatem równaniem wielomianowym trzeciego stopnia ze względu na objętość molową. Biorąc pod uwagę rząd wielkości empirycznych współczynników a i b [7] oraz realne wartości ciśnienia p i temperatury T , otrzymamy zawsze jedno rozwiązanie rzeczywiste takiego równania (z uwagi na dodatni wyróżnik postaci kanonicznej). Mamy zatem np. możliwość obliczenia analitycznie objętości molowej gazu dla innych niż normalne warunków ciśnienia i temperatury.

2. PRZYKŁADY

2.1. Zadanie 1: dwie naładowane kulki

Klasyczny problem, w którym pojawia się równanie trzeciego stopnia, to problem dwóch naładowanych ciał. Rozważmy dwie małe metalowe kulki o jednakowych masach m powieszono na niciach o długości l , zaczepionych w tym samym punkcie. Kulki te początkowo stykają się ze sobą. Następnie dostarczamy im ładunek elektryczny $2q$, który rozkłada się na nich po równo, a w efekcie odpychanie kulombowskie rozdziela kulki tworząc z ich środków i punktu zawieszenia trójkąt równoramienny o podstawie x (rysunek 1). Zadanie polega na znalezieniu wspomnianej odległości x , na jaką kulki oddalą się od siebie.

W uproszczonym wariacie opisywanym przez Cedrika [5] przyjmuje się, że kąt rozwarcia nitek jest bardzo mały, wskutek czego otrzymuje się trywialne równanie trzeciego stopnia o rozwiązaniu

$$x = \sqrt[3]{\frac{2klq^2}{mg}}, \quad (9)$$

gdzie k to „stała” elektrostatyczna, zaś g to przyspieszenie ziemskie. W wariacie „bezkompromisowym” na podstawie rysunku 1 znajdujemy związki:

$$\sin \theta = \frac{x}{2l}, \quad \tan \theta = \frac{kq^2}{mgx^2}. \quad (10)$$

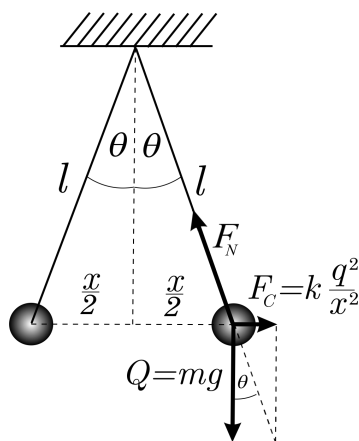
Eliminując z nich następnie kąt θ otrzymujemy równanie:

$$m^2g^2x^6 + k^2q^4(x^2 - 4l^2) = 0, \quad (11)$$

które można przekształcić do postaci:

$$ay^3 + y - 4 = 0, \quad a := \frac{m^2g^2l^4}{k^2q^4}, \quad y := \frac{x^2}{l^2}. \quad (12)$$

Równanie (12) ma jedno rzeczywiste rozwiązanie bez względu na wartość parametru a (jest to fizycznie jasne, jako że przedstawione zagadnienie może mieć tylko jedno rozwiązanie).



Rysunek 1. Dwie odpychające się kulki: Q – ciężar kulek, F_c – siła kulombowskiego odpychania między nimi, F_N – siła naciągu nici. W stanie równowagi wypadkowa sił działających na kulkę wynosi zero

Źródło: opracowanie własne.

Używając do jego rozwiązania dostępnych online narzędzi (np. [8]), dostajemy:

$$y = \frac{\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}{a\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}. \quad (13)$$

Nie mając dostępu do narzędzi bazujących na pakietach do obliczeń symbolicznych, uzyskanie rozwiązania (13) – bez znajomości wzoru Cardano – jest praktycznie niemożliwe.

Jeśli jednak znamy wzór Cardano, porównując (3) z (12) łatwo zauważyć, że $3p = -\frac{1}{a}$ oraz $2q = \frac{4}{a}$. Z (4) dostajemy

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{a} + \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{27a^3}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{a} - \sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{27a^3}}} \quad (14)$$

Oczywiście rozwiązania (13) i (14) są tożsame, co łatwo sprawdzić. Wracając do podstawienia ze wzorów (12) otrzymujemy odległość między kulkami:

$$x = l\sqrt{\frac{\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}{a\sqrt[3]{9}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{18a^2 + \sqrt{3}\sqrt{108a^4 + a^3}}}} \quad (15)$$

2.2. Zadanie 2: pionowy ruch małej kulki w polu grawitacyjnym ze stałymi oporami powietrza

W poprzednim przykładzie równanie trzeciego stopnia (12) zależało od jednego parametru rzeczywistego a , który mógł przyjmować dowolne wartości dodatnie. Na równanie trzeciego stopnia, zależne jedynie od ustalonych współczynników, natykamy się przy rozważaniu

zagadnienia ciała wyrzuconego pionowo w górę w polu grawitacyjnym przy obecności stałych sił oporu (pomińmy dyskusję, czy stała siła oporu powietrza zdarza się w realnych sytuacjach).

Sformułujmy zagadnienie: napisz równania na prędkość i drogę podczas ruchu „w górę” i „w dół” dla ciała wyrzuconego pionowo do góry z prędkością początkową o wartości v_0 ; wyznacz czas wznoszenia i opadania, prędkość w chwili uderzenia o podłoże i maksymalną wysokość, na którą ciało się wzniosło. Zadanie rozwiąż w dwóch przypadkach:

- przy braku oporów powietrza,
- jeśli opory powietrza przyjmują stałą wartość.

W drugim przypadku przebadaj zależność całkowitego czasu ruchu oraz wartości prędkości od wartości siły oporu powietrza.

2.2.1. Ruch bez oporu

Rozważmy najpierw przypadek bez oporu (rysunek 2 z $F=0$).

W pierwszej fazie ruchu „w górę” równanie II zasady dynamiki Newtona ma postać $ma_g = -mg$ z warunkami początkowymi $s(0)=0$, $v_g(0)=v_0$. W drugiej fazie ruchu „w dół” mamy $ma_d = mg$ o raz warunki początkowe $s(0)=0$, $v_d(0)=0$. Ruch jest ruchem jednostajnie zmiennym i łatwo znajdujemy zależności:⁴

$$\begin{aligned} v_g(t) &= v_0 - gt; & v_d(t) &= gt; \\ s_g(t) &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}; & s_d(t) &= \frac{gt^2}{2}; \end{aligned} \quad (16)$$

Kiedy ciało osiąga maksymalną wysokość H_0 , jego prędkość spada do zera. Oznaczając przez t_g czas wznoszenia, znajdujemy zależności:

$$t_g = \frac{v_0}{g}; \quad H_0 = \frac{v_0^2}{2g}; \quad (17)$$

W drugiej fazie ruchu, czyli w trakcie opadania w dół, ciało ma początkową prędkość równą zero. Spada z wysokości, na którą wcześniej się wzniosło, czyli z H_0 . Czas opadania t_d znajdujemy zatem z warunku $s_d(t_d) = H_0$, otrzymując:

$$t_d = \sqrt{\frac{2H_0}{g}}. \quad (18)$$

Wykorzystując zależności (17) dostajemy

$$t_g = t_d. \quad (19)$$

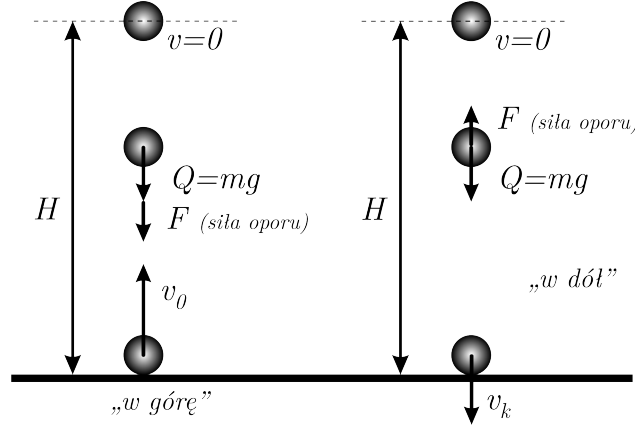
Prędkość uderzenia o podłoże $v_k = v_d(t_d)$, czyli

$$v_k = v_0. \quad (20)$$

Prędkość uderzenia o podłoże jest zatem równa prędkości, z jaką ciało zostało wyrzucone. To zrozumiałe, jako że brak oporów implikuje brak strat energii. Oznaczmy czas wznoszenia i czas opadania w przypadku braku oporów przez t_0 . A zatem

$$t_0 := \frac{v_0}{g} = t_g = t_d. \quad (21)$$

⁴ Będziemy używać indeksów „g” dla oznaczenia wielkości w trakcie ruchu „w górę” oraz „d” dla ruchu „w dół”.



Rysunek 2. Ruch ciała w górę i w dół
Źródło: opracowanie własne.

Całkowity czas ruchu

$$t_c = t_g + t_d = 2t_0. \quad (22)$$

2.2.2. Ruch ze stałym oporem

Rozważmy teraz sytuację, w której oprócz siły ciężkości działa siła oporu o stałej wartości $F \geq 0$, takiej samej podczas obu etapów ruchu (i zawsze przeciwnie skierowanej do chwilowej prędkości ciała). Równania ruchu mają teraz postać:

$$\begin{aligned} ma_g &= -mg - F \implies a_g = -g(1+x) \\ ma_d &= mg - F \implies a_d = g(1-x), \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie oznaczyliśmy $x := \frac{F}{mg}$. Zauważmy, że siła oporu musi być mniejsza od ciężaru ciała. W przeciwnym razie w trakcie spadania ciała mogłoby dojść do niefizycznej sytuacji, w której ciało pozostałoby nieruchome (lub w najlepszym przypadku spadało ruchem jednostajnym). Zakładamy zatem, że $F < mg$, czyli $x < 1$. Oczywiście, $x \geq 0$.

Stosując równania (23) znajdujemy

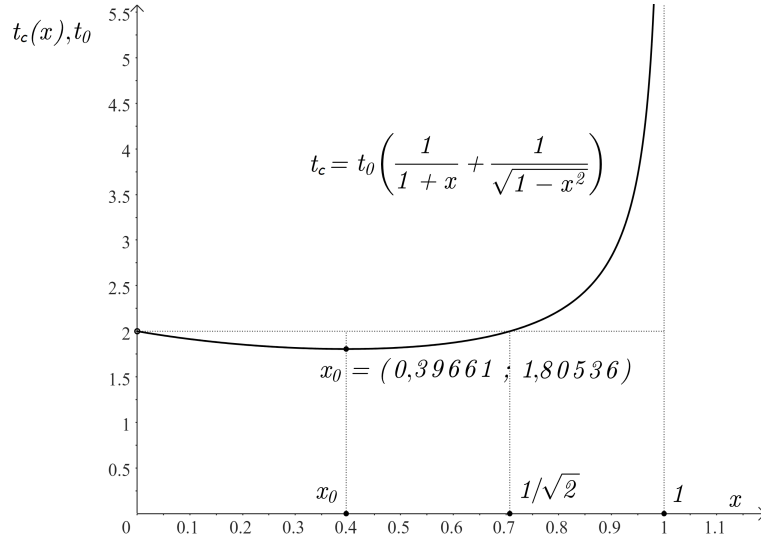
$$\begin{aligned} v_g(t) &= v_0 - (1+x)gt; & v_d(t) &= (1-x)gt; \\ s_g(t) &= v_0t - (1+x)\frac{gt^2}{2}; & s_d(t) &= (1-x)\frac{gt^2}{2}; \end{aligned} \quad (24)$$

Podobnie jak w przypadku ruchu bez oporu, łatwo znajdujemy czas wznoszenia, wiedząc, że $v_g(t_g) = 0$, co daje:

$$t_g = \frac{v_0}{g(1+x)} = \frac{t_0}{1+x}. \quad (25)$$

Po czasie t_g ciało wznosi się na wysokość $H = s_g(t_g)$, czyli:

$$H = \frac{1}{1+x} \frac{v_0^2}{2g} = \frac{H_0}{1+x}. \quad (26)$$

Rysunek 3. Wykres funkcji $t_c(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Aby wyznaczyć czas opadania, wykorzystajmy fakt, że $s_d(t_d) = H$, skąd otrzymujemy

$$t_d = \frac{v_0}{g\sqrt{1-x^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (27)$$

Ciało uderza o podłoże z prędkością $v_k = v_d(t_d)$, co daje:

$$v_k = v_0 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (28)$$

Zauważmy, że $t_g < t_0 < t_d$. Dokładniej, zachodzi relacja

$$t_d = t_g \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \quad (29)$$

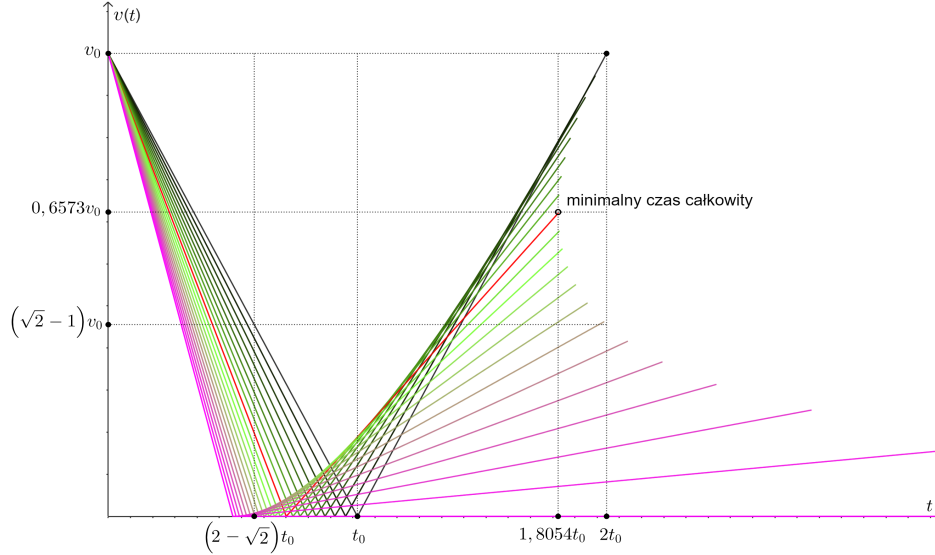
Czas całkowity wyraża się z kolei wzorem:

$$t_c(x) = t_0 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right). \quad (30)$$

Wykres funkcji $t_c(x)$ jest przedstawiony na Rysunku 3.

Z wykresu funkcji $t_c(x)$ widzimy, że dla pewnej wartości zmiennej x czas całkowity jest taki sam, jak w przypadku ruchu bez oporów. Aby znaleźć tę wartość, musimy rozwiązać równanie $t_c = 2t_0$, które daje:

$$x(1-2x^2) = 0 \quad (31)$$

Rysunek 4. Wykres prędkości w funkcji czasu $v(t)$

Źródło: opracowanie własne.

Równanie to ma trzy rozwiązania, z których pierwsze $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nie ma sensu fizycznego, drugie $x = 0$ odpowiada oczywistemu przypadkowi ruchu bez oporów, a trzecie, najbardziej nas interesujące, to $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zatem, jeśli siła oporu ma wartość $F = \frac{\sqrt{2}}{2}mg$, czas ruchu jest dokładnie taki sam, jak w przypadku braku oporów. Oczywiście w takim przypadku ciało wznosi się na wysokość niższą niż H_0 , a dokładniej równą $H_0(2 - \sqrt{2})$, oraz uderza w podłoże z prędkością $(\sqrt{2} - 1)v_0$.

Teraz rozważmy zagadnienie, które doprowadzi nas do równania trzeciego stopnia. Zauważmy, że funkcja $t_c(x)$ ma minimum. Istnieje zatem taka wartość siły oporu, dla której całkowity czas ruchu jest najkrótszy. Minimum funkcji $t_c(x)$ znajdziemy przyrównując do zera jej pochodną. Dostajemy równanie:

$$2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0. \quad (32)$$

Równanie to ma jeden pierwiastek rzeczywisty, równy

$$x_0 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{4 + 3\sqrt{78}}}{\sqrt[3]{4}} - \frac{7}{\sqrt[3]{2(4 + 3\sqrt{78})}} \right) \approx 0,39661. \quad (33)$$

Jest to interesujący wynik: jeśli siła oporu wynosi $F \approx 0,39661mg$, całkowity czas ruchu jest najkrótszy. Dokładniej, dla $x = x_0$ mamy:

$$t_g \approx 0,71602t_0, \quad t_d \approx 1,08934t_0, \quad t_c \approx 1,8054t_0, \quad v_k \approx 0,6573v_0, \quad H \approx 0,71602H_0 \quad (34)$$

Na rysunku 4 przedstawiony jest wykres wartości wektora prędkości w funkcji czasu dla kilku różnych wartości parametru x .

3. PODSUMOWANIE

Opisane w paragrafach 2.1 i 2.2 przykłady pokazują, że równania sześciennie pojawiają się nawet w prostych zagadnieniach fizycznych. Problem dwóch odpychających się kul to zadanie – na poziomie fizyki zagadnienie – stopniem trudności nie wykraczające poza ramy programu szkoły średniej. Jednak nawet takie zadanie stawia przed rozwiązującym je uczniem równanie stopnia trzeciego. Bez znajomości metody analitycznej lub bez dostępu do pakietów do obliczeń symbolicznych znalezienie rozwiązania (15) przez ucznia szkoły średniej lub nawet przez studenta pierwszego roku studiów technicznych jest, naszym zdaniem, niemożliwe. Podobnie jest z rozwiązaniem (33) bardziej wyrafinowanego problemu minimalnego czasu ruchu dla ciała poruszającego się w polu grawitacyjnym w obecności stałych sił oporu powietrza.

Podsumowując, warto podkreślić, że metodom rozwiązywania równań sześciennych powinno się poświęcać trochę więcej czasu, nawet jeśli nie na poziomie szkoły średniej, to przynajmniej na pierwszych latach studiów technicznych.

LITERATURA

- [1] van der Waerden B.L., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [2] Gładki P., *Uwagi historyczne o wzorach Cardano*, online <http://www.math.us.edu.pl/pgladki/faq/node129.html> (dostęp: 21.10.2024).
- [3] Bronsztejn I.N., Siemiendajew K.A., *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 2019.
- [4] Ramond P., *Abel-Ruffini's Theorem: Complex but Not Complicated!*, "The American Mathematical Monthly" 2022, vol. 129, no. 3.
- [5] Cedrik M.S., *Ćwiczenia z fizyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, PWN, Warszawa 1974.
- [6] Cedrik M.S., *Zadania z fizyki*, PWN, Warszawa 1986.
- [7] Weast R.C., *Handbook of Chemistry and Physics (53rd Edn.)*, Chemical Rubber Company, Cleveland 1972.
- [8] Wolfram Alpha Widgets, *Solutions of cubic equations*, online <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55> (dostęp: 21.10.2024).

JOANNA KUCNER^{*1}, BOŻENA ŚWIĄTEK^{†1}

O PEWNYM RÓWNANIU W ZBIORZE LICZB ZESPOLONYCH

¹ Centre of Mathematics and Physics, Lodz University of Technology, Al. Politechniki 11, 93-590 Łódź, Poland

Artykuł opisuje pewne równanie w zbiorze liczb zespolonych, które można rozwiązać kilkoma metodami odwotującymi się do różnych własności (zwłaszcza liczb zespolonych). Autorki wskazują także dydaktyczne zalety zapoznania studentów z tymi metodami.

Keywords: liczby zespolone, równania wielomianowe.

1. WSTĘP

Liczby zespolone zostały wprowadzone w XVI wieku na potrzeby algebry. Okazało się bowiem, że poprzez dopuszczenie pierwiastków z liczb ujemnych można wyprowadzać ogólne wzory do rozwiązywania równań trzeciego stopnia [1]. Liczby zespolone zostały następnie wykorzystane w innych zagadnieniach matematycznych, np. w rozwiązywaniu równań różniczkowych [2], w obliczaniu całek oznaczonych z funkcji rzeczywistych przy pomocy residuów [3]. Po wielu latach okazało się, że ten tak pozornie abstrakcyjny dział matematyki ma zastosowanie w wielu innych dziedzinach nauki. Przykładowo w elektrotechnice liczby zespolone przydają się one do analizy obwodów elektrycznych prądu przemiennego, wyrażając jego moc czynną oraz bierną [4]. Ponadto ułatwiają obliczanie prądów zwarciovych [4], co w praktyce przekłada się na płynną i nieprzerwaną dystrybucję prądu, np. do mieszkań.

Liczby zespolone pomagają w analizowaniu i modelowaniu złożonych zagadnień, które pojawiają się w grafice komputerowej i modelowaniu 3D [5], w funkcjach falowych w fizyce kwantowej [6], w dynamice płynów i aerodynamice [7], w teorii sygnałów i przetwarzania danych [8], w teorii chaosu i dynamiki nieliniowej [9]. Liczby zespolone są też kluczowe przy tworzeniu efektów filmowych, a ze względu na liczne zastosowania są wbudowane w niektórych językach programowania, np. w Fortran czy Python [10].

To wszystko sprawia, że liczby zespolone są tematem omawianym na wielu kierunkach na uczelniach wyższych. Jednak liczba godzin przeznaczona na to zagadnienie pozwala przedstawić słuchaczom tylko podstawy pozwalające posługiwać się liczbami zespolonymi, bez poruszania takich zagadnień, jak na przykład analiza zespolona.

Jednym z tematów, jakie wchodzą w zakres realizowanego materiału, jest rozwiązywanie równań w zbiorze liczb zespolonych [11]. W poniższym artykule chcemy rozważyć jedno z takich równań, które rozwiązać możemy na kilka sposobów z których każdy ma pewne walory dydaktyczne.

^{*}joanna.kucner@p.lodz.pl[†]bozena.swiatek@p.lodz.pl

2. ZESPOLONE RÓWNANIE WIELOMIANOWE

2.1. Metoda pierwsza

Rozważmy równanie:

$$z^3 - 8 = 0. \quad (1)$$

Jest ono oczywiście równoważne równaniu:

$$z^3 = 8, \quad (2)$$

a zatem, aby znaleźć rozwiązania równania (2), wystarczy policzyć pierwiastki trzeciego stopnia z liczby 8. Można to zrobić wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej. Łatwo policzyć, że $|8| = 8$, a argument tej liczby wynosi: $\phi = 0$. Obliczamy zatem pierwiastki z liczby 8 korzystając ze wzoru na pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, które możemy zapisać w postaci [11]

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right), \quad (3)$$

gdzie $k = 0, 1, \dots, n - 1$. A zatem

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + 0i) \\ &= 2 \\ w_1 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \\ w_2 &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right) = 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \\ &= -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned} \quad (4)$$

2.2. Metoda druga

Drugi – i chyba najkrótszy – sposób rozwiązania równania (1) polega na skorzystaniu ze wzoru na różnicę sześcianów:

$$\begin{aligned} z^3 - 8 = 0 &\iff z^3 - 2^3 = 0 \iff (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0 \iff \\ &\iff z = 2 \quad \vee \quad z^2 + 2z + 4 = 0 \iff \\ &\iff z_1 = 2 \quad \vee \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i \quad \vee \quad z_3 = -1 + \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

2.3. Metoda trzecia

W trzecim sposobie rozwiązania równania (1) wykorzystamy postać kartezjańską liczby zespolonej z . Możemy zapisać, że

$$z = x + iy,$$

dla pewnych $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas równanie (1) przyjmie postać:

$$(x + iy)^3 - 8 = 0 \implies x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = 8. \quad (5)$$

Liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają równe części rzeczywiste i urojone, a zatem:

$$x^3 - 3xy^2 = 8, \quad (6a)$$

$$3x^2y - y^3 = 0. \quad (6b)$$

Zajmijmy się równaniem (6b):

$$\begin{aligned} y(3x^2 - y^2) = 0 &\iff y = 0 \quad \vee \quad (\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0 \iff \\ &\iff y = 0 \quad \vee \quad y = \sqrt{3}x \quad \vee \quad y = -\sqrt{3}x. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy równanie (6a):

- dla $y = 0$ równanie (6a) przyjmuje postać $x^3 - 8 = 0$, zatem $x = 2$;
- dla $y = \sqrt{3}x$ równanie (6a) przyjmuje postać $x^3 - 3x \cdot 3x^2 - 8 = 0$. Doprowadzając lewą stronę do najprostszej postaci otrzymujemy $-8x^3 - 8 = 0$, a stąd $x = -1$;
- dla $y = -\sqrt{3}x$ równanie (6a) przyjmuje taką samą postać jak w poprzednim przypadku, zatem i tu również $x = -1$.

Podsumowując, mamy trzy rozwiązania układu równań (6a) i (6b), (a więc i równania (1)):

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i.$$

2.4. Metoda czwarta

W czwartym sposobie rozwiązania równania (1) wykorzystamy fakt, że pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej z dzielą okrąg o promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ na n równych łuków [11]. Jedno rozwiązanie równania (1) łatwo jest odgadnąć:

$$z_1 = 2$$

(argument główny tej liczby to $\phi = 0$). Zatem pozostałe pierwiastki z liczby 8 muszą być liczbami zespolonymi o argumentach $\frac{2}{3}\pi$ oraz $\frac{4}{3}\pi$ (bo $2\pi : 3 = \frac{2}{3}\pi$, $0 + \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ oraz $\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$). Stąd obliczamy (wykorzystując wzory redukcyjne) pozostałe pierwiastki równania:

$$\begin{aligned} z_2 &= 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi) = 2[\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi - \frac{\pi}{3})] = 2(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = \\ &= 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 + \sqrt{3}i, \end{aligned}$$

oraz analogicznie

$$\begin{aligned} z_3 &= 2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi) = 2[\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{3})] = 2(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = \\ &= 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

3. PODSUMOWANIE

Od wielu lat prowadzimy zajęcia dla studentów na różnych wydziałach Politechniki Łódzkiej, na których matematyka nie jest przedmiotem kierunkowym. Zazwyczaj jej nauczanie ogranicza się do dwóch semestrów, z czego łącznie kilkanaście godzin przeznaczone jest na wykład i ćwiczenia z liczb zespolonych. Ponadto wśród naszych studentów dość rzadko spotyka się osoby szczególnie interesujące się matematyką. Niech świadczy o tym fakt, że niewielu z nich zadaje proste pytanie: "Po co są liczby zespolone?", a jeszcze mniej z nich zna na nie odpowiedź. Dobrze więc, że zagadnienie to jest omawiane na zajęciach.

Musimy przyznać, że podstawy teorii liczb zespolonych (działania oraz równania w zbiorze liczb zespolonych) są często przyjmowane przez słuchaczy, którzy po raz pierwszy się z nimi spotkają, z pewną ciekawością, jako coś zaskakującego (np. fakt, że w zbiorze liczb zespolonych każde równanie kwadratowe ma przynajmniej jedno rozwiązanie czy też fakt, że pierwiastek n -tego stopnia z liczby zespolonej różnej od 0 ma n różnych wartości). Pewną trudność stanowi jednak konieczność posługiwania się w niektórych zadaniach trygonometrią (zwłaszcza wzorami redukcyjnymi).

Odnosząc się bezpośrednio do równania (1), uważamy, że warto poświęcić czas na rozwiązanie tego równania (bądź równania o podobnym stopniu trudności) na ćwiczeniach wszystkimi przedstawionymi metodami. Pierwszy sposób pozwala na nowo przypomnieć wprowadzoną na wykładzie definicję pierwiastka n -tego stopnia w zbiorze liczb zespolonych. Z naszych obserwacji wynika, że studenci rzadko potrafią skojarzyć rozwiązywanie tego równania z koniecznością obliczenia pierwiastków trzeciego stopnia z liczby 8. Oczywiście zaletą dydaktyczną tego sposobu jest również utrwalenie pojęcia postaci trygonometrycznej liczby zespolonej i wzoru Moivre'a.

Drugi sposób jest okazją do przypomnienia, że w zbiorze liczb zespolonych każde równanie kwadratowe ma rozwiązanie oraz powtórzenie sposobu rozwiązywania takich równań. W dalszym toku nauczania matematyki będzie to dla studentów niezbędną umiejętnością, choćby przy zagadnieniach związanych z równaniami różniczkowymi liniowymi rzędu drugiego. Drugi sposób daje również sposobność poznania lub przypomnienia wzoru na różnicę sześcianów, który pozwala uniknąć procedury dzielenia wielomianów.

Trzeci z kolei sposób jest okazją do przypomnienia warunku na równość dwóch liczb zespolonych zapisanych w postaci kartezjańskiej. Ponadto zaletą pod względem dydaktycznym jest tu konieczność rozwiązywania otrzymanego nieliniowego układu równań i właściwego zinterpretowania otrzymanych wyników, z czym nieraz studenci spotykają się po raz pierwszy.

Czwarty sposób pozwala przypomnieć geometryczną interpretację pierwiastków z liczby zespolonej. Z naszego doświadczenia wynika, że przez te wszystkie lata tylko jeden student połączył taką interpretację z rozwiązaniem równania (1), mimo że było to zagadnienie omawiane na wcześniejszych zajęciach.

Reasumując: naszym zdaniem – mimo małej ilości czasu, jaką można na zajęciach ze studentami przeznaczyć na kwestie związane z liczbami zespolonymi – warto w ramach podsumowania tej tematyki rozwiązać zaproponowane przez nas równanie (1) każdą z przedstawionych metod. Uważamy, że warto to zrobić nie tylko w celu uświadomienia studentom, że istnieją różne sposoby podejścia do tego samego zadania, ale że jest to również okazja do utrwalenia pewnych zagadnień, pojęć i technik z teorii liczb zespolonych.

LITERATURA

- [1] Hołubowski W., Pleszczyński M., Różański M., Słowik R., Smuda A., Wituła R., *Liczby zespolone. Tom 1. Podstawowe operacje na liczbach zespolonych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2023.
- [2] Kryszicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 2*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2011.
- [3] Kącki E., Siewierski L., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Informatyki w Łodzi, Łódź 2002.
- [4] Bolkowski S., *Teoria obwodów elektrycznych*, Wydawnictwo WNT Warszawa 2016.
- [5] Vince J., *Mathematics for Computer Graphics*, Springer-Verlag, London 2006.
- [6] Kryszewski S., *Mechanika kwantowa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2018.
- [7] Jeżowiecka K., Szewczyk H., *Mechanika płynów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.
- [8] Oppenheim A.V., Schaffer R.W., *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Sulejówek 1979.
- [9] Awrejcewicz J., *Tajemnice nieliniowej dynamiki*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
- [10] Saha A., *Matematyka w Pythonie*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 2021.
- [11] Dobrowolska K., Dyczka W., Jakuszenkow H., *Matematyka dla studentów studiów technicznych cz. 1*, Wydawnictwo Helpmath, Łódź 1996.

MICHAŁ WASIAK¹

AN ANALYSIS OF THE THEORY OF TRANSFER LENGTH METHOD

¹ Institute of Physics, Lodz University of Technology, ul. Wólczńska 227/221, 63-005 Łódź, Poland

In this paper we present derivation of the equations describing the resistance between the electrodes used in The Transfer Length Method, both for the linear and circular configurations. For the circular configuration, we have obtained an approximated formula which is more accurate than the most widely used formula. Conditions allowing for verification if the approximations can be applied are also presented.

Keywords: Transfer Length Method, modified Bessel functions.

1. INTRODUCTION

Since the 1960s the Transmission Line Method (TLM) has been a basic method for determination of the contact resistivity of metallic electrodes deposited on a semiconductor [1–4]. It allows also for determination of the sheet resistance of the semiconductor material on which the electrode is deposited. Usually, the measurement of the resistivity of the semiconductor is performed if the semiconductor layer is thin relative to the lateral dimensions of the electrodes because in this case the theory and hence the interpretation of the experimental data is much simpler than in a more general case [2].

TLM measurements are performed using a set of either rectangular electrodes (usually called simply a TLM measurement), or using electrodes in form of concentric rings (circular TLM or cTLM). In this paper, a detailed derivation of the formulas used for interpretation of the experimental data and a discussion of the important approximations often used in practical applications is presented.

The solutions for equations describing the current flow between the TLM electrodes are distinctly different in the case of linear and cylindrical configurations. First, a simpler case will be analysed.

2. LINEAR TLM

A linear TLM structure consists of a series of rectangular electrodes separated by a distance which is different for each to adjacent electrodes. In Figure 1 a top view of a part of such a structure is presented.

For each of the electrode pair, a current-voltage (I - V) curve is measured. Assuming that this curve is linear, the electrical resistance R for this pair can be determined. This resistance is a result of the resistance caused by the contact between the metal electrode and the semiconductor it is deposited on, and by the resistance of the semiconductor itself. The resistance of the metal can be neglected. In what follows, we will derive a formula for R . We will use the following approximation (see Figure 1 for the definitions of the symbols):

*michal.wasiak@p.lodz.pl

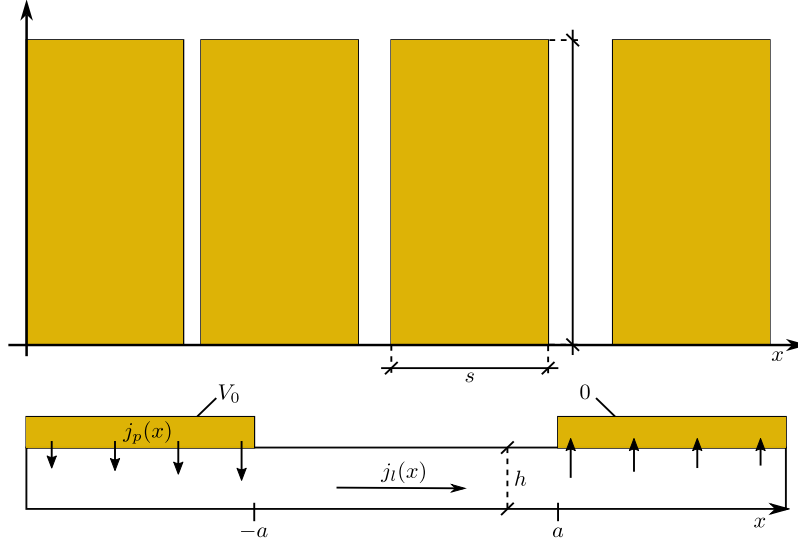


Figure 1. On the top: Top view of part of a linear TLM structure. On the bottom: a side cross-section of an area between two neighbouring electrodes

Source: own work.

- The thickness h of the semiconductor layer is very small, so that we can assume that current flows uniformly in the vertical direction and hence we can neglect this dimension in our calculations;
- The current density does not depend on y . This can be true if the distances between the electrodes are much smaller than their width, or if the TLM structure is fabricated in such a way that the current cannot spread beyond the area determined by the electrodes' width;
- The electrodes are semi-infinite in the x direction (i.e. in Figure 1 $s = \infty$); the potential of the left electrode is V_0 , and 0 on the right electrode. Later, we will discuss the case in which $s < \infty$.

The density of the vertical current which flows from the electrode into the semiconductor (or the other way round) depends on x and can be expressed as:

$$j_p(x) = \varsigma_c (V_c - u(x)) \quad (1)$$

where $u(x)$ is the local electric potential; V_c is the electrode potential (equal to either V_0 or 0); and ς_c is the surface conductivity of the electrode–semiconductor interface (the unit of ς_c is S/m²). The above formula is valid if x refers to a point covered by the electrode, otherwise $j_p = 0$. The horizontal current I_l and its density j_l for any x are given by the following formula:

$$j_l(x) = -\sigma_s u'(x) \quad (2)$$

$$I_l(x) = hw j_l(x) \quad (3)$$

where σ_s is the electrical conductivity of the semiconductor material. On the other hand, the horizontal current in the area below an electrode (i.e. for $|x| > a$) is related to j_p in the following manner:

$$I_l(x) = \begin{cases} w \int_{-\infty}^x j_p(\xi) d\xi & \text{for } x < -a \\ I_l(a) + w \int_a^x j_p(\xi) d\xi & \text{for } x > a \end{cases} \quad (4)$$

We differentiate both sides of the above equation with respect to x , substitute (3) and we get the following equation (valid both for $x > a$ and $x < -a$):

$$hwj_l'(x) = wj_p(x) \quad (5)$$

By reducing w and substituting (1) and (2) we get:

$$u''(x) - \gamma^2 u(x) + \gamma^2 V_c = 0 \quad (6)$$

where

$$\gamma^2 = \frac{S_c}{h\sigma_s} \quad (7)$$

We could assume that the conductivities of the left and the right electrode are different ($\varsigma_e^{(1)}$ and $\varsigma_e^{(2)}$ respectively). Then we would have coefficients γ_1 for $x < -a$ and γ_2 for $x > a$. The general solutions in these two areas are as follows:

$$u_1(x) = C_1 \exp(\gamma_1 x) + \tilde{C}_1 \exp(-\gamma_1 x) + V_0 \quad \text{for } x < -a \quad (8)$$

$$u_2(x) = \tilde{C}_2 \exp(\gamma_2 x) + C_2 \exp(-\gamma_2 x) \quad \text{for } x > a \quad (9)$$

For $x \rightarrow -\infty$ potential u has to tend to V_0 , while for $x \rightarrow \infty$ to 0 (which are the potential of the respective electrodes). Otherwise, an infinite current would flow through the structure. It means that both coefficients $\tilde{C}$ must vanish and hence:

$$u_1(x) = C_1 \exp(\gamma_1 x) + V_0 \quad \text{for } x < -a \quad (10)$$

$$u_2(x) = C_2 \exp(-\gamma_2 x) \quad \text{for } x > a \quad (11)$$

Between the electrodes (for $|x| < a$), current $I_l(x)$ and hence its density $j_l(x)$ must be constant and equal, respectively, to I (which is the total current flowing between the electrodes) and j . Using Eq. (2) we conclude that in this area $u''(x) = 0$ which means that u is a linear function:

$$u(x) = -\frac{j}{\sigma_s} x + b \quad \text{for } |x| < a \quad (12)$$

Continuity of $j_l(x)$ and Eqs. (2), (10) and (11) give us the following relation:

$$-C_1 \sigma_s \gamma_1 \exp(-\gamma_1 a) = j = C_2 \sigma_s \gamma_2 \exp(-\gamma_2 a) \quad (13)$$

and hence:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \exp(-(\gamma_2 - \gamma_1)a) \quad (14)$$

Continuity of $u(x)$ at $x = -a$ and $x = a$ provides further two equations which can be used to determine parameters C_1, C_2, b, j . The parameter we really need is j , since it gives us the total current I . After some elementary calculations we get:

$$\frac{V_0}{j} = \frac{1}{\sigma_s} (2a + \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}) \quad (15)$$

Let $L = 2a$ denote the distance between the electrodes. The resistance between them is equal to V_0/I , so after substituting (7) we obtain:

$$R(L) = \frac{L}{hw\sigma_s} + \frac{1}{w\sqrt{h\sigma_s}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varsigma_{c1}}} + \frac{1}{\sqrt{\varsigma_{c2}}} \right) = \frac{L}{hw\sigma_s} + \frac{2\sqrt{\varrho_c}}{w\sqrt{h\sigma_s}} \quad (16)$$

where

$$2\sqrt{\varrho_c} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma_{c1}}} + \frac{1}{\sqrt{\varsigma_{c2}}} \quad (17)$$

Since Eq. (15) γ_1^{-1} and γ_2^{-1} are simply added, in the linear TLM experiment it is impossible to determine separately the resistivities of the individual electrodes. Instead, we can use a single γ . However, in principle these resistivities should be the same, so this is not considered a problem.

In the TLM experiment $R(L)$ is measured for several values of L . This relation should be linear, as predicted by Eq. (16), and the experimental data provide parameters α and R_0 in the following relation:

$$R(L) = \alpha L + R_0 \quad (18)$$

Combining the above experimental parameters and the theoretical relation we obtain two relations for the semiconductor electrical conductivity (in the horizontal direction) and the contact resistivity:

$$\sigma_s = \frac{1}{hw\alpha} \quad (19a)$$

$$\varrho_c = \frac{1}{4} R_0^2 w^2 h \sigma_s = \frac{w R_0^2}{4\alpha} \quad (19b)$$

The simple and practical formula (19) was derived under the assumption that the electrodes can be considered semi-infinite along x direction. Now we will provide a criterion to verify if this assumption is valid in individual cases.

2.1. Verification if the semi-infinite electrodes assumption is valid

The relations derived so far assume that the current flowing from an electrode to the semiconductor uses the whole infinite length of the electrode, while in fact the available length is equal to s . Let us calculate the current which flows through the part of an electrode which in fact does not exist. Integrating formula (1) with the proper limits and using Eq. (13) and (2) we obtain the following formulas for the total current I and the current injected to the actually existing part of the second electrode (equal to the current injected by the actually existing part of the first electrode):

$$I = \int_a^\infty \varsigma_c u(x) = \frac{wj}{\sigma_s \gamma^2} \quad (20)$$

$$I_s = \int_a^{a+s} \varsigma_c u(x) = \frac{wj}{\sigma_s \gamma^2} (1 - \exp(-\gamma s)) \quad (21)$$

If the difference between those two currents is negligibly small (relative to the total current), the simplification we used can be considered valid. This gives the following criterion which can be used for such a validation:

$$\exp(-\gamma s) \ll 1 \iff \exp\left(-\frac{s}{\sqrt{h\varrho_c\sigma_c}}\right) = \exp\left(-\frac{2s\alpha}{R_0}\right) \ll 1 \quad (22)$$

What if one cannot apply the considered simplification?

2.2. Solution for finite electrodes

The problem with finite electrodes can be solved. The differential equations derived above are still valid. What is different is the boundary conditions. Instead of

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} j_l(x) = 0 \quad (23)$$

now we have to use

$$\lim_{x \rightarrow \pm(a+s)} j_l(x) = 0 \quad (24)$$

In this case, we will use a more convenient form of the general solution (6)

$$u_1(x) = A_1 \cosh(\gamma_1(x - x_1)) + \tilde{A}_1 \sinh(-\gamma_1(x - x_1)) + V_0 \quad \text{for } x < -a \quad (25)$$

$$u_2(x) = \tilde{A}_2 \cosh(\gamma_2(x - x_2)) + A_2 \sinh(-\gamma_2(x - x_2)) \quad \text{for } x > a \quad (26)$$

where $x_1 = -a - s$ and $x_2 = a + s$ are the outer boundaries of the electrodes. Then, using (24) one can see that $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2 = 0$. The properties of the hiperbolic functions allow us to write (13) in the following way:

$$-A_1 \sigma_s \gamma_1 \sinh(\gamma_1 s) = j = A_2 \sigma_s \gamma_2 \sinh(\gamma_2 s) \quad (27)$$

Relation (12) remains true and combining it with the above formula we obtain a more general version of Eq. (15):

$$\frac{V_0}{j} = \frac{1}{\sigma_s} (2a + \gamma_1^{-1} \coth(\gamma_1 s) + \gamma_2^{-1} \coth(\gamma_2 s)) \quad (28)$$

Because $\coth(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$, under condition (22) the above formula reduces to the form presented in Eq. (15).

The exact solution does not change the formula for σ_s , however ϱ_c is given in an implicit form. The non-simplified version of relations (19) can be expressed in the following form, assuming that $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$:

$$\sigma_s = \frac{1}{hw\alpha} \quad (29a)$$

$$R_0 = \frac{2 \coth(\gamma s)}{hw\sigma_s \gamma} = 2\sqrt{\frac{\alpha \varrho_c}{w}} \coth\left(s\sqrt{\frac{w\alpha}{\varrho_c}}\right) \quad (29b)$$

In the analysis of linear TLM presented above, we always assumed that the current flow is bounded to the area of the width equal to the electrodes' width. This is a sound assumption only if the distance between the electrodes is much smaller than the electrode width. However, if the conductivity of the semiconductor material is high, the resistance between the electrodes can be vary small relative to the contact resistance. This can severely deteriorate the accuracy of the determination of the semiconductor conductivity. In such a case, a cTLM measurement may be a better choice.

3. CIRCULAR TLM

A single cTLM electrode pair has a form of two concentric rings, where the inner ring is usually a full disk, as shown in Figure 2. In a cTLM experiment the resistivities for several such pairs, with different dimensions, are measured. In this section, we will derive

a theoretical formula for the resistivity of such a pair. In our derivation we will use polar co-ordinates. We will also use the first of the three approximations used in section 2.

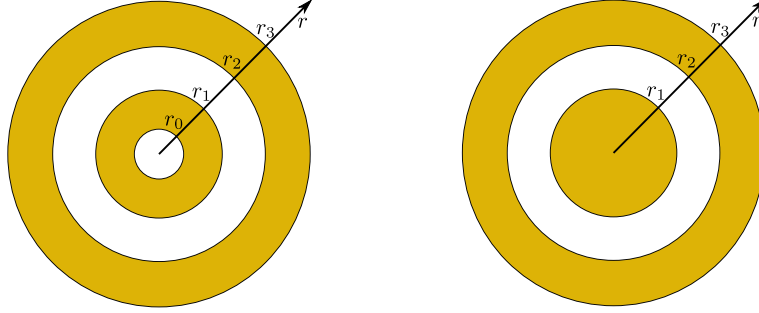


Figure 2. A top view of two possible configurations of an electrode pair used in the cTLM experiment

Source: own work.

The density of the (horizontal) current flowing between the electrodes through the semiconductor has only the radial component j_l , which is independent from the angle, because of the rotational symmetry of the system. Similarly, the electrical potential u depends only on the radial co-ordinate r . In polar co-ordinates, the analogues to formulas (1) and (2) have the following form:

$$j_p(r) = \varsigma_c (V_c - u(r)) \quad (30a)$$

$$j_l(r) = -\sigma_s u'(r) \quad (30b)$$

where the symbols have the same meaning as in section 2. We will consider a circular sector with its central angle φ . For $\varphi = 2\pi$ we will get the whole plane. The formula that describes the relation between the current flowing through this sector and its density looks as follows:

$$I_l(r) = hr\varphi j_l(r) \quad (31)$$

In the area beneath the electrodes we additionally have the following relations:

$$I_l(r) = \begin{cases} \varphi \int_{r_0}^r \xi j_p(\xi) d\xi & \text{for } r_0 < r < r_1 \\ I_l(r_2) + \varphi \int_{r_2}^r \xi j_p(\xi) d\xi & \text{for } r_2 < r < r_3 \end{cases} \quad (32)$$

By differentiating formulas (31) and (32), substituting Eq. (30) and (7) we obtain the following equation (valid below the electrodes):

$$r^2 u''(r) + ru'(r) - \gamma^2 r^2 (u(r) - V_c) = 0 \quad (33)$$

The general solution for this equation has the following form

$$u(r) = B_I I_0(\gamma r) + B_K K_0(\gamma r) + V_c \quad (34)$$

where I_0 i K_0 are the modified Bessel functions. The equation for the potential between the electrodes is much simpler:

$$u'(r) + ru''(r) = 0 \quad (35)$$

Its solution, for $\varphi = 2\pi$ can be expressed using the total current I in the following way:

$$u_m(r) = -\frac{I}{2\pi h\sigma_s} \ln\left(\frac{r}{p}\right) \quad (36)$$

where p is a parameter whose value we are yet to determine.

In what follows we will simplify our considerations assuming that $r_0 = 0$ (which is how the inner electrode is usually fabricated) and that $r_3 \rightarrow \infty$. The latter condition is very similar to the third approximation used in section 2. Then, using the following properties of the Bessel function:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} K_0(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} I_0(\xi) = \infty \quad (37)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} I_0(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} K_0(\xi) = 0 \quad (38)$$

we obtain

$$u_1(r) = B_1 I_0(\gamma_1 r) + V_1 \quad (39a)$$

$$u_2(r) = B_2 K_0(\gamma_2 r) + V_2 \quad (39b)$$

where u_1, u_2 are the electrical potentials in the semiconductor below, respectively, the inner and the outer electrode, while V_1, V_2 are the respective electrode potentials. Continuity of the current at r_1 and r_2 provides the following equations:

$$-h\sigma_s B_1 \gamma_1 2\pi r_1 I_0'(\gamma_1 r_1) = I = -h\sigma_s B_2 \gamma_2 2\pi r_2 K_0'(\gamma_2 r_2) \quad (40)$$

Using the following properties of the modified Bessel function [5]:

$$I_n' = \frac{1}{2}(I_{n-1} + I_{n+1}) \quad (41a)$$

$$K_n' = -\frac{1}{2}(K_{n-1} + K_{n+1}) \quad (41b)$$

$$I_{-1} = I_1 \quad (41c)$$

$$K_{-1} = K_1 \quad (41d)$$

we obtain the following formula:

$$-\sigma_s B_1 \gamma_1 2\pi r_1 I_1(\gamma_1 r_1) = I = \sigma_s B_2 \gamma_2 2\pi r_2 K_1(\gamma_2 r_2) \quad (42)$$

The resistance between the electrodes $(V_1 - V_2)/I$ can be expressed, using Eqs. (36), (39) and (40) in the following way:

$$R(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi h\sigma_s} \left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{r_1 \gamma_1} \frac{I_0(r_1 \gamma_1)}{I_0'(r_1 \gamma_1)} - \frac{1}{r_2 \gamma_2} \frac{K_0(r_2 \gamma_2)}{K_0'(r_2 \gamma_2)} \right) \quad (43)$$

or, using Eq. (41):

$$R(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi h\sigma_s} \left(\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{r_1 \gamma_1} \frac{I_0(r_1 \gamma_1)}{I_1(r_1 \gamma_1)} + \frac{1}{r_2 \gamma_2} \frac{K_0(r_2 \gamma_2)}{K_1(r_2 \gamma_2)} \right) \quad (44)$$

Neither of the two relations is very convenient. Let us try to get rid of the modified Bessel functions using an approximation which is valid if $|x|$ is sufficiently large [6]:

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (45)$$

$$K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\pi x}} e^{-x} \quad (46)$$

It allows us to find a convenient estimation of the Bessel function to their derivatives:

$$\frac{I_0(x)}{I'_0(x)} \approx \frac{2x}{2x-1} \quad (47)$$

$$\frac{K_0(x)}{K'_0(x)} \approx -\frac{2x}{2x+1} \quad (48)$$

In the literature, often the above two ratios is approximated simply by 1 [7, 8]. Below we present three formulas for the resistance, starting from the most accurate and ending on the least accurate of them:

$$R(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{r_1 \gamma_1} \frac{I_0(r_1 \gamma_1)}{I_1(r_1 \gamma_1)} + \frac{1}{r_2 \gamma_2} \frac{K_0(r_2 \gamma_2)}{K_1(r_2 \gamma_2)} \right) \quad (49)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{2}{2r_1 \gamma_1 - 1} + \frac{2}{2r_2 \gamma_2 + 1} \right) \quad (50)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{r_1 \gamma_1} + \frac{1}{r_2 \gamma_2} \right) \quad (51)$$

Unlike in the linear TLM case, in the above formulas the contributions from the individual electrodes (described by γ_1 and γ_2) is not the same. If, hypothetically, the electrode resistivity depended on the direction of the current flow (but otherwise were perfectly linear), a measurement of the IV curve for a cTLM structure, would show a difference in slope between the negative and positive current side. If this is not the case, we can say that $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, and the above formulas can be written in the following form:

$$R(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{r_1 \gamma} \frac{I_0(r_1 \gamma)}{I_1(r_1 \gamma)} + \frac{1}{r_2 \gamma} \frac{K_0(r_2 \gamma)}{K_1(r_2 \gamma)} \right) \quad (52)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{2}{2r_1 \gamma - 1} + \frac{2}{2r_2 \gamma + 1} \right) \quad (53)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi h \sigma_s} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right) \quad (54)$$

3.1. Validity of the Bessel functions approximations

Let us analyze when the approximations considered above are valid. The exact solution Eq. (49) (however assuming that the outer ring is semi-infinite) contains terms in the form $B(x)/B'(x)$ where B is a modified Bessel function: either I_0 or K_0 . In the approximation (50) and (51) we used the following sequence of simplifications:

$$\frac{I_0(x)}{I'_0(x)} = \frac{I_0(x)}{I_1(x)} \approx \frac{2x}{2x-1} \approx 1 \quad (55)$$

$$-\frac{K_0(x)}{K'_0(x)} = \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \approx \frac{2x}{2x+1} \approx 1 \quad (56)$$

The accuracy for both approximations improves with $|x| \rightarrow \infty$. However, we do not know yet when x is sufficiently large. Now, we will try to answer this question. Let us denote:

$$\begin{aligned} Q_I(x) &= \frac{I_0(x)}{I_1(x)} & q_I(x) &= \frac{2x}{2x-1} & \tilde{q}(x) &= 1 \\ Q_K(x) &= \frac{K_0(x)}{K_1(x)} & q_K(x) &= \frac{2x}{2x+1} \\ r_I(x) &= 1 - \frac{q_I(x)}{Q_I(x)} & \tilde{r}_I(x) &= 1 - \frac{\tilde{q}(x)}{Q_I(x)} \\ r_K(x) &= 1 - \frac{q_K(x)}{Q_K(x)} & \tilde{r}_K(x) &= 1 - \frac{\tilde{q}(x)}{Q_K(x)} \end{aligned}$$

Functions r and $\tilde{r}$ are simply the relative error of approximation q and $\tilde{q}$ respectively. Figure 3 presents a comparison of the approximations used in this paper. If we assume that an error below 1% is acceptable, we can see that approximation q , and hence formula (50) is valid if $\gamma r_1 > 4.5$, while formula (51) should not be used unless $\gamma r_1 > 50$. Since formula (50) is only slightly more complicated than formula (51), there is probably no reason to use the latter at all for fitting to experimental data. However, it seems that Eq. (50) does not appear in the literature and only Eqs. (49) and (51) are reported.

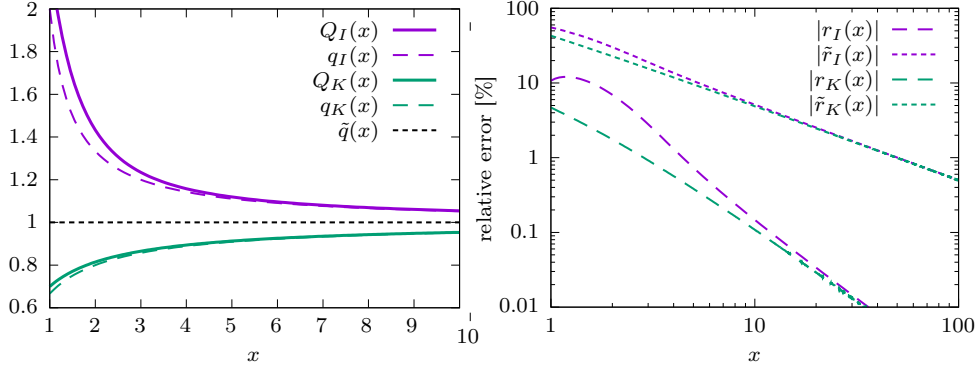


Figure 3. Left: Comparison of the considered approximations of the ratios of the Bessel functions; Right: The relative errors of the approximations

Source: own work.

The above estimations are important not only to validate if the formula used for determination of parameters γ and σ_s was correct. If Eq. (50) is to be used, then one has to accept that for the radii of the outer rings greater than $\sim 1.4r_0$ the combined resistance of both electrodes is less than 10% of the total resistance. This greatly (and negatively) impacts the accuracy of determination of the contact resistance in such an experiment. Of course, whether or not the contact resistance can be reliably determined in such an experiment depends on the system geometry and the material parameters. If $\gamma r_0 > 50$, the cTLM configuration itself is not ideal to determine the contact resistance. On the other hand, when the material conductivity is high, that it is hard to measure in the linear TLM configuration, cTLM can be a suitable method. Whatever the situation, since Eq. (51) compared with Eq. (50) does not seem to provide any significant simplification, there is probably no reason to use Eq. (51).

4. SUMMARY

No we will summarize the paper presenting the procedure of experimental data analysis. We assume that a set of I - V curves have been measured—one curve for each pair of electrodes, and provided that they are linear, for each of them the resistance was determined. If the I - V curves are not linear, then the electrode deposition was faulty, and the TLM theory presented here cannot be applied. If we want to determine σ_s we also need to know the thickness of the semiconductor layer.

4.1. Linear TLM

In the case of linear TLM, the experimental data give us a relation $R(L)$, where R is the resistance between electrodes separated by a distance L . A linear function $f(L) = \alpha L + R_0$ is fitted to the experimental data. Then, the condition given in Eq. (22) should be verified. If this condition is fulfilled, formulas (19) can be used to determine the investigated material parameters. If not, formulas (29) should be used, however in order to find ϱ_c a numerical root-finding will be necessary.

4.2. Circular TLM

When cTLM is used, we measure a function $R(r_1, r_2)$. Often, r_1 is identical in all the measured electrode pairs, and then we can assume that we have a function $R(r_2)$. Then we fit relation (53) to the experimental data, obtaining the values for σ_s and γ . If $r_1 \gamma > 4.5$, formula (53) can be considered valid. If not, we have to perform least-square fitting again, using this time Eq. (52). Using Eq. (54) should be avoided.

REFERENCES

- [1] Berger H., *Contact resistance on diffused resistors*, 'IEEE International Solid-State Circuits Conference. Digest of Technical Papers' 1969, vol. XII, pp. 160–161.
- [2] Eidelloth S., Brendel R., *Analytical theory for extracting specific contact resistances of thick samples from the transmission line method*, 'IEEE Electron Device Letters' 2014, vol. 35, no. 1, pp. 9–11.
- [3] Reeves G.K., Harrison H.B., *Obtaining the specific contact resistance from transmission line model measurements*, 'IEEE Electron Device Letters' 1982, vol. 3, no. 5, pp. 111–113.
- [4] Liu T., Huang R., Li F., Huang Z., Zhang J., Liu J., Zhang L., Zhang S., Dingsun A., Yang H., *Study on the measurement accuracy of circular transmission line model for low-resistance ohmic contacts on III-V wide band-gap semiconductors*, 'Current Applied Physics' 2018, vol. 18, no. 7, pp. 853–858.
- [5] Kącki E., Siewierski L., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1975, pp. 133–134.
- [6] Temme N.M., *A double integral containing the modified Bessel function: Asymptotics and computation*, 'Mathematics of Computation' 1986, vol. 47, no. 176.

- [7] Ho J-K., Jong C-S., Chiu C.C., Huang C-N., Shih K-K., Chen L-C., Chen F-R., Kai J-J., *Low-resistance ohmic contacts to p-type GaN achieved by the oxidation of Ni/Au films*, 'Journal of Applied Physics' 1999, vol. 86, no. 8, pp. 4491–4497.
- [8] Klootwijk J.H., Timmering C.E., *Merits and limitations of circular TLM structures for contact resistance determination for novel III-V HBTs* [in:] Hagiwara Y. (ed.), *Proceedings of the 2004 International Conference on Microelectronic Test Structures, Japan 2004*, pp. 247–252.

PIOTR GÓRSKI^{*1}, MACIEJ DŁUŻNIEWSKI^{†1}

DRGANIA SWOBODNEGO PRĘTA JAKO WSTĘP DO OPISU DRGAŃ KAMERTONU

¹ Instytut Fizyki Politechniki Łódzkiej, ul. Wólczańska 217/221, 93-005 Łódź, Polska

Przedstawiony w pracy opis drgań podłużnych i poprzecznych pręta pokazuje, że w przypadku wykorzystania drgającego pręta, jako elementu będącego źródłem fal mechanicznych w powietrzu decydujące znaczenie ma sposób zamocowania pręta oraz sposób pobudzania pręta do drgań.

Opis podłużnych drgań pręta znalazł między innymi zastosowanie w modelu tzw. rury Kundta, gdzie warunkiem wzbudzenia drgań pręta jest zamocowanie pręta na sztywno (w jednym lub w dwóch miejscach) tak, aby na jego końcach powstała strzałka.

Próba wykorzystania opisu drgań podłużnych pręta do wyjaśnienia zasady działania kamertonu, jako źródła fal mechanicznych w postaci dźwięku o zadanej częstotliwości, jest całkowicie błędna gdyż zgięty pręt w kamertonie nie jest w żadnym ustalonym miejscu sztywno zamocowany i dlatego nieuprawnione wydaje się założenie, że jego drgania są drganiami podłużnymi.

Słowa kluczowe: kamerton, drgania podłużne, drgania poprzeczne

1. ZASADA DZIAŁANIA KAMERTONU

Pod pojęciem kamertonu zwykle rozumie się przyrząd służący do strojenia instrumentów muzycznych. W gronie kamertonów najbardziej popularny jest tzw. kamerton widelkowy wynaleziony w Anglii w roku 1711 przez Johna Shora zwany „diapazonem” [1]. Takim kamertonem najczęściej jest metalowy pręt zgięty w połowie w kształcie litery U i umocowany na podstawie zwanej stopą. Zwykle stopa i pręt stanowią jedność. Widelki kamertonu pobudzane są do drgań poprzez uderzenie w jedno z ramion kamertonu młoteczką. Widok typowego kamertonu stroikowego (służącego do strojenia instrumentów przedstawiono na rysunku 1.

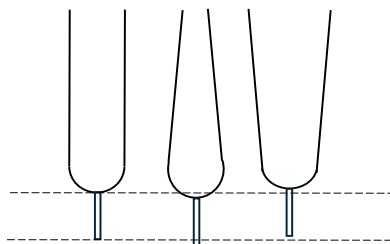
^{*}piotr.gorski@p.lodz.pl[†]maciej.dluzniewski@p.lodz.pl



Rysunek 1. Kamerton stroikowy ustawiony na tzw. pudle rezonansowym wraz z wyposażeniem w postaci młoteczka
Źródło: opracowanie własne.

Zasada działania kamertonu polega na wzbudzeniu w nim złożonych drgań widełek w wyniku uderzenia młoteczkiem. Widełki drgając:

1. stają się źródłem fali akustycznej (o zadanej częstotliwości) w otaczającym kamerton powietrzu,
2. wprowadzają w drgania stopę, co schematycznie przedstawiono na rysunku 2.

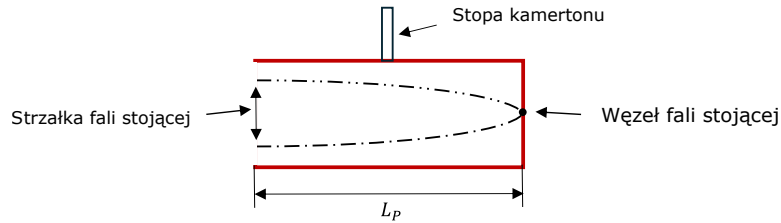


Rysunek 2. Zasada wprowadzenia w ruch góra-dół stopy kamertonu. Gdy ramiona kamertonu są zbliżone do siebie to wygięcie w kształcie litery U zmienia nieznacznie swój kształt powodując obniżenie położenia stopy. Gdy z kolei ramiona kamertonu są oddalone, to kształt litery U ulega spłaszczeniu i stopa unosi się do góry

Źródło:[2].

Z uwagi na fakt, że same drgające ramiona są słabym promiennikiem fal akustycznych, brzmienie kamertonu można wzmocnić umieszczając stopę na odpowiednio skonstruowanym pudle rezonansowym, co pokazano na rysunku 3. Pudło stanowi płaska skrzynka otwarta z jednego lub obu końców. Długość pudła jest tak dobrana, aby w przypadku pudła otwartego na jednym końcu miało ono długość równą $1/4$ długości fali dźwiękowej w powietrzu powstałej w wyniku drgań stopy z zadaną częstotliwością. W przypadku pudła obustronnie otwartego długość pudła to $1/2$ długości fali dźwiękowej w powietrzu.

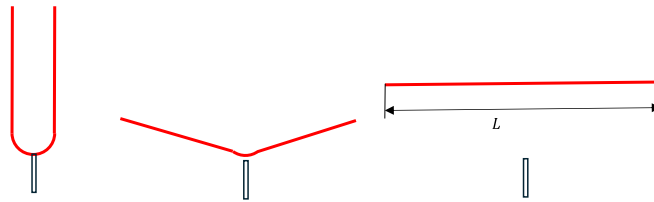
Konstrukcja pudła wzmacniającego dźwięk oparta jest na zjawisku rezonansu. Gdy generator fal dźwiękowych (takim jest drgająca stopa kamertonu) umieścić w środku górnej powierzchni jednostronnie otwartego pudła to po wprowadzeniu powierzchni w drgania może w pudle powstać fala stojąca, co zobrazowano na rysunku 3.



Rysunek 3. Rezonans fali dźwiękowej w pudle jednostronnie otwartym. Długość pudła $L_P = \lambda_P/4$, gdzie $\lambda_P = \frac{v_P}{f_K}$. Oznaczenia: λ_P to długość fali akustycznej w powietrzu, v_P to prędkość fazowa rozchodzenia się fali akustycznej w powietrzu, zaś f_K jest częstotliwością drgań kamertonu

Źródło: opracowanie własne.

Analiza drgań kamertonu jest dosyć skomplikowana. Podstawowy model drgań można opisać poprzez rozważenie rozchodzenia się zaburzenia w rozprostowanym kamertonie pozbawionym stopy, co przedstawiono na rysunku 4, z uwzględnieniem, że środek tak powstałego pręta musi drgać. W dalszej części zostanie rozstrzygnięte czy te drgania są podłużne czy poprzeczne.



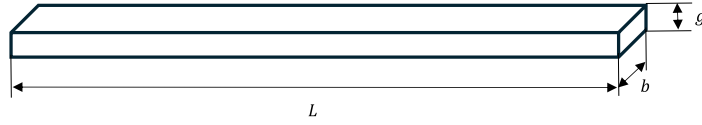
Rysunek 4. Rozprostowany i rozmontowany kamerton. Widelki można przedstawić, jako pręt o długości L

Źródło: opracowanie własne.

Wprawienie pręta w drgania polega na uderzeniu w niego młoteczkiem. Podczas uderzenia młoteczka, wektor prędkości $\vec{v}_M$ z jaką uderza on w pręt może być nachylony pod dowolnym kątem do pręta. Skutkuje to tym, że w pręcie mogą rozchodzić się dwa zaburzenia: podłużne – wzdłuż osi pręta, poprzeczne – prostopadle do osi pręta.

2. DRGANIA PODŁUŻNE PRĘTA

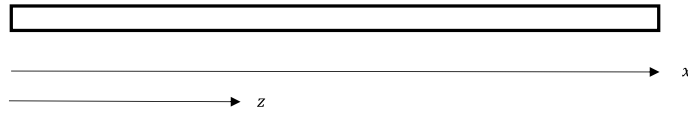
Można założyć, że pręt, w którym będzie rozchodzić się fala podłużna to prostopadłościan o długości L i wymiarach poprzecznych $b \times g$, jak na rysunku 5.



Rysunek 5. Widok analizowanego pręta o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta o wymiarach $b \times g$

Źródło: opracowanie własne.

Wprowadzając jednowymiarowy układ odniesienia $\{x, z\}$, położenie pręta można zobrazić jak na rysunku 6.



Rysunek 6. Położenie pręta w jednowymiarowym układzie odniesienia $\{x, z\}$

Źródło: opracowanie własne.

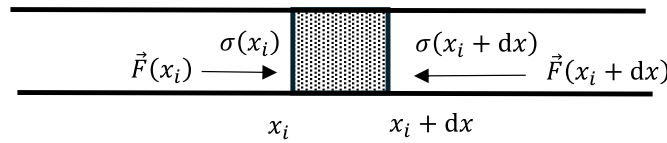
Pręt wykonany jest z materiału, dla którego znane są: gęstość ρ oraz moduł Younga E . Niech w odległości x_i od początku pręta znajduje się odcinek pręta o długości dx . Wiadomo, że w dowolnym punkcie x_i pręta o przekroju poprzecznym S występują naprężenia normalne $\sigma(x_i)$ opisane wzorem

$$\sigma(x_i) = \frac{F(x_i)}{S}, \quad (1)$$

gdzie $F(x_i)$ jest wartością siły prostopadłej do przekroju poprzecznego pręta. Obecność naprężenia skutkuje pojawieniem się deformacji $\varepsilon(x_i)$, związanej z naprężeniem $\sigma(x_i)$ poprzez prawo Hooke'a

$$\varepsilon(x_i) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} = \frac{1}{E} \sigma(x_i). \quad (2)$$

Założenie, że młoteczek uderza cyklicznie w pręt z częstością ω_{ML} , prowadzi do wniosku, że pod wpływem tych uderzeń w pręcie rozchodzą się cykliczne naprężenia normalne. Wówczas naprężenia $\sigma(x_i)$ oraz $\sigma(x_i + dx)$ występujące w pobliżu odcinka dx pręta można przedstawić tak jak na rysunku 7.



Rysunek 7. Naprężenia i siły występujące na obu końcach odcinka dx pręta

Źródło: opracowanie własne.

Oznacza to, że zgodnie ze wzorem (2.1) i (2.2) na lewy przekrój odcinka dx pręta podziała

siła $F(x_i)$ równa

$$F(x_i) = ES \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i}, \quad (3)$$

zaś na prawy przekrój odcinka pręta dx podziała siła $F(x_i + dx)$ równa

$$F(x_i + dx) = ES \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i + dx}. \quad (4)$$

Zwrot siły $F(x_i + dx)$ jest przeciwny do zwrotu siły $F(x_i)$. Wynika to z trzeciej zasady dynamiki Newtona. W rzeczywistości siła $F(x_i + dx)$ jest przyłożona ze strony elementu dx na kolejny element znajdujący się po prawej stronie od dx , podobnie jak siła $F(x_i)$ jest siłą przyłożoną do elementu dx ze strony sąsiadującego z dx elementu po jego lewej stronie.

Oznacza to, że na element dx działa wypadkowa siła F , której wartość można wyznaczyć w oparciu o zależności (3) i (4) ze wzoru

$$F = F(x_i + dx) - F(x_i) = ES \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i + dx} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} \right]. \quad (5)$$

Rozwijając funkcję $\frac{\partial z}{\partial x}$ w szereg Taylora i ograniczając rozwinięcie jedynie do pierwszego składnika szeregu, można otrzymać

$$F \cong ES \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x_i} \right] \cong ES \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx. \quad (6)$$

Pod wpływem siły F , zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, element dx o masie dm porusza się z przyspieszeniem a opisanym równaniem

$$a = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{F}{dm} = \frac{F}{\rho S dx}. \quad (7)$$

Podstawiając zależność (6) do (7) otrzymuje się równanie

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{ES \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i} dx}{\rho S dx} = \frac{E}{\rho} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{x_i}. \quad (8)$$

Z uwagi na fakt, że długość elementu dx jest bardzo mała, to we wzorze (8) można opuścić indeks x_i i otrzymać równanie fali dla dowolnego punktu x pręta w postaci

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego drugiego stopnia jest między innymi funkcja $z(x, t)$ opisana równaniem

$$z(x, t) = A_L \sin(\omega_M t - k_L x + \varphi_0), \quad (10)$$

gdzie A_L jest amplitudą drgań podłużnych, ω_M jest częstością drgań dowolnego elementu dx pręta oraz $k_L = 2\pi/\lambda_L$ jest tzw. wektorem falowym fali podłużnej o długości λ_L pod warunkiem, że

$$\left(\frac{\omega_M}{k_L} \right)^2 = \frac{E}{\rho}. \quad (11)$$

Równanie (10) opisuje rozchodzenie się w pręcie podłużnej fali płaskiej, dla której wyrażenie będące argumentem funkcji sinus jest tzw. fazą fali $\varphi(x, t)$ równą

$$\varphi(x, t) = (\omega_M t - k_L x + \varphi_0), \quad (12)$$

gdzie φ_0 jest tzw. fazą początkową.

Ustalając dowolną wartość funkcji opisanej wzorem (12) – np. niech $\varphi(x, t) = \varphi_C$ – można sprawdzić jak jednocześnie muszą zmieniać się argumenty funkcji (12) (czyli x i t) aby faza fali pozostawała taka sama (stała). Wynika stąd, że różniczka takiej fazy musi być równa zeru

$$d(\varphi(x, t)) = d\varphi_C = 0. \quad (13)$$

Oznacza to, że

$$d(\varphi(x, t)) = d(\omega_M t - k_L x + \varphi_0) = \omega_M dt - k_L dx = 0. \quad (14)$$

Stąd

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_M}{k_L}. \quad (15)$$

Wyrażenie (15) opisuje prędkość, z jaką przesuwa się wzdłuż osi x stała faza np. φ_C i stąd nazwa tej prędkości to „prędkość fazowa v_F ” rozchodzącej się w pręcie fali podłużnej opisanej równaniami (9) i (10) i wynosi ona (w oparciu o wzór (11))

$$v_F = \frac{\omega_M}{k_L} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (16)$$

Zgodnie z zasadą Huygensa, gdy fala dotrze do końca pręta (np. $x = L$) punkt końcowy staje się źródłem wtórnej fali (tzw. odbitej) o dokładnie takiej samej częstotliwości jak fala pierwotna tyle, że wędrującej w przeciwną stronę niż fala pierwotna. Ośrodkiem otaczającym pręt jest powietrze, którego opór falowy $Z_{\text{powietrze}} = \rho_p v_F^{(p)}$, gdzie gęstość powietrza $\rho_p \cong 1,185 \text{ kg m}^{-3}$ zaś $v_F^{(p)} \cong 346 \text{ m s}^{-1}$ jest prędkością fazową fali w powietrzu. Opór falowy powietrza jest dużo mniejszy od oporu falowego pręta $Z_{\text{pręta}} = \rho v_F = \sqrt{E\rho}$, co skutkuje tym, że fala odbita na końcu pręta nie jest przesunięta w fazie względem fali padającej. Oznacza to, że w pręcie przemieszczają się dwie fale wzajemnie spójne (o tych samych częstotliwościach i porównywalnych amplitudach A_L) nakładające się na siebie, czyli w tym przypadku interferujące ze sobą zgodnie z równaniem

$$z(x, t) = A_L \sin(\omega_M t - k_L x) + A_L \sin(\omega_M t + k_L x). \quad (17)$$

Wykorzystując wzór trygonometryczny

$$\sin \alpha + \sin \theta = 2 \sin \frac{\alpha + \theta}{2} \cos \frac{\alpha - \theta}{2} \quad (18)$$

oraz fakt, że funkcja cosinus jest funkcją parzystą, równanie (17) przyjmuje postać

$$z(x, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L x). \quad (19)$$

Fala odbita wędrując w pręcie ponownie odbija się, ale tym razem na drugim końcu pręta (w punkcie $x = 0$). Zgodnie ze wzorem (19)

$$z(x = 0, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L \times 0) = 2A_L \sin(\omega_M t). \quad (20)$$

Oznacza to, że w tym punkcie pręt drga z maksymalną amplitudą równą $2A_L$. Ale z punktu widzenia symetryczności zjawiska identyczna sytuacja musi mieć miejsce w punkcie $x = L$, czyli

$$z(x = L, t) = 2A_L \sin(\omega_M t) \cos(k_L L) = 2A_L \sin(\omega_M t). \quad (21)$$

Zatem koniec pręta ($x = L$) drga z amplitudą $2A_L$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\cos(k_L L) = \pm 1. \quad (22)$$

Gdy $\cos(k_L L) = -1$ to $k_L L = \pi$. Oznacza to, że w pręcie rozchodzi się fala o długości λ_{L1} , którą można wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{2\pi}{\lambda_{L1}} L = \pi, \quad (23)$$

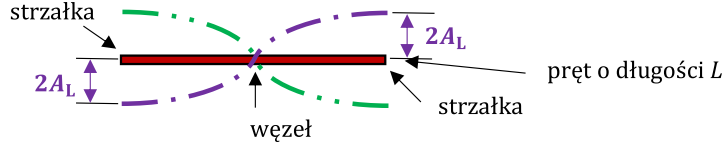
czyli

$$\lambda_{L1} = 2L. \quad (24)$$

Długości fali λ_{L1} odpowiada częstotliwość f_{L1} drgań podłużnych każdego elementu pręta

$$f_{L1} = \frac{v_F}{\lambda_{L1}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (25)$$

Takie drganie można zobrazować jak na rysunku 8.



Rysunek 8. Drganie podłużne pręta z częstotliwością f_{L1} . Jest to tzw. „mod podstawowy” drgającego pręta

Źródło: opracowanie własne.

Gdyby z kolei $\cos(k_L L) = +1$, to $k_L L = 2\pi$. Oznacza to, że w pręcie rozchodzi się fala o długości λ_{L2} , którą można wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{2\pi}{\lambda_{L2}} L = 2\pi, \quad (26)$$

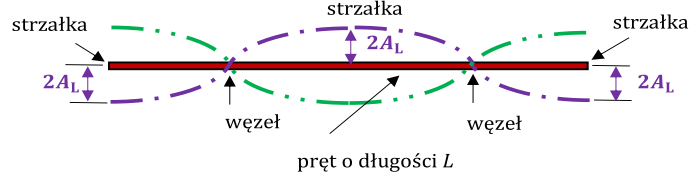
czyli

$$\lambda_{L2} = L. \quad (27)$$

Długości fali λ_{L2} odpowiada częstotliwość f_{L2} drgań każdego elementu pręta

$$f_{L2} = \frac{v_F}{\lambda_{L2}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2 \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 2f_{L1}. \quad (28)$$

Takie drganie można zobrazować jak na rysunku 9.



Rysunek 9. Drganie podłużne pręta z częstotliwością f_{L2} . Jest to tzw. „drugi mod harmoniczny” drgającego pręta
Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione na rysunkach 8 i 9 drgania pręta stanowią przykłady tzw. fal stojących, które mogą zaistnieć w drgającym pręcie. Niemniej warunkiem ich powstania jest okresowe uderzanie młoteczkiem w pręt. Zakładając, że brak jest czynników rozpraszających energię, to gdy w całkowitej objętości pręta przemieszczają się w obie strony fale spójne można w pewnym momencie odstąpić od uderzania młoteczkiem w pręt a fala stojąca będzie nieskończenie długo występować w pręcie.

W pręcie można wzbudzić kolejne mody fal stojących, którym odpowiadają coraz to wyższe częstotliwości – odpowiednio f_{L3} , f_{L4} , ..., f_{Ln} , gdzie n jest liczbą naturalną – będące wielokrotnością częstotliwości podstawowej f_{L1}

$$f_{Ln} = n f_{L1} . \quad (29)$$

O tym jaki mod (sposób) drgania wystąpi decydują dwa czynniki:

1. sposób zamocowania (podparcia) pręta,
2. zasoby energetyczne.

Zamocowanie na stałe pręta w jego środku powoduje, że w pręcie rozchodzi się fala o częstotliwości f_{L1} lub fala o częstotliwości będącej nieparzystą wielokrotnością częstotliwości f_{L1} . Zamocowanie pręta w dwóch miejscach (w węzłach jak na rysunku 9) skutkuje drganiami pręta z częstotliwością f_{L2} lub parzystymi wielokrotnościami f_{L1} . Gdyby jednak sposób zamocowania pręta był nieustalony to o wyborze sposobu drgań zadecyduje energia drgającego pręta.

Objętościową gęstość energii fali mechanicznej ρ_V^{En} w punkcie P o współrzędnej x_P opisuje wzór

$$\rho_V^{En}(x, t)_P = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_P^2 + v_F^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_P^2 \right] . \quad (30)$$

Po podstawieniu równania fali stojącej (19) do powyższego wzoru

$$\rho_V^{En}(x, t)_P = 2 \rho A_L^2 \omega_M^2 [\cos^2(k_L x_P) \cos^2(\omega_M t) + \sin^2(k_L x_P) \sin^2(\omega_M t)] . \quad (31)$$

Stąd energię En drgającego pręta w danej chwili $t^\otimes$ opisuje wzór

$$En(t^\otimes) = \int_0^L \rho_V^{En}(x, t^\otimes) dx . \quad (32)$$

Po podstawieniu (31) do (32) końcowy wzór na energię $En(t^{\otimes})$ drgającego pręta jest postaci

$$En(t^{\otimes}) = 2\rho A_L^2 \omega_M^2 \left[\frac{1}{2}L + \frac{\lambda_L}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi L}{\lambda_L}\right) \cos(2\omega_M t^{\otimes}) \right]. \quad (33)$$

Średnią energię $\langle En \rangle$ drgającego pręta w jednym okresie T jego drgania opisuje wzór

$$\langle En \rangle = \frac{\int_0^T En(t^{\otimes}) dt^{\otimes}}{T}. \quad (34)$$

Stąd po podstawieniu (33) do (34) średnia energia wynosi

$$\langle En \rangle = 2\rho A_L^2 \omega_M^2 \cdot \frac{1}{2}L = \rho L A_L^2 \omega_M^2 = 4\pi^2 \rho L A_L^2 f_L^2. \quad (35)$$

Oznacza to, że średnia energia drgającego pręta zależy od kwadratu częstotliwości modu drgania i jest najmniejsza dla podstawowego modu, czyli drgania pręta z częstotliwością f_{L1} . Zatem mając do wyboru różne mody drgania, gdy brak jest warunków brzegowych związanych ze sposobem zamocowania pręta, wybiera on drganie o jak najmniejszej energii czyli drganie z częstotliwością f_{L1} , jak gdyby „sugerując” aby go podeprzeć w jego środku. Porównując rysunek 4 z 8 widać tutaj pewien problem. Zgodnie z rysunkiem 4 w środku pręta, (czyli tam gdzie znajduje się stopa kamertonu) powinny występować drgania. Ale zgodnie z rysunkiem 8, dla podstawowego modu drgania pręta, w jego środku znajduje się węzeł. To z kolei sugeruje, że dobrze by było, aby w takim przecie powstał „drugi mod harmoniczny drgania” ze strzałką w środku pręta. Aby tak jednak mogło się stać, pręt musiałby być podparty w węzłach jak na rysunku 9. Z zasady działania kamertonu wynika jednak, że pręt z którego jest on wykonany nigdzie z wyjątkiem jego środka, gdzie umieszczona jest stopa kamertonu, nie jest podparty. To podparcie w środku pręta jest szczególne, bo stopa kamertonu działa jak przetwornik „mechaniczno-akustyczny” przenoszący drgania pręta na powierzchnię pudła, do której dotyka nóżka, tak jak pokazano na rysunkach 1–3.

Podsumowując powyższe rozważania należy podkreślić, że drgania podłużne nie wystarczają do opisu działania kamertonu z następujących powodów.

1. Wymagają one cyklicznego uderzania młoteczką, najlepiej w specyficzny sposób, równoległe do pręta, przy czym częstotliwość f_L uderzeń musi spełniać warunek

$$f_L = \frac{v_F}{\lambda_L}. \quad (36)$$

Dodatkowo, aby powstała fala stojąca

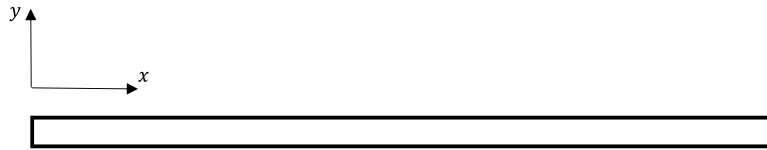
$$L = n \frac{\lambda_L}{2}, \quad (37)$$

gdzie z kolei $n \in \mathbb{N}$ (należy do zbioru liczb naturalnych) i stanowi o tzw. rzędzie fali harmoniczej. A w praktyce w kamerton uderza się tylko raz.

2. Nawet gdyby uderzać cyklicznie, to dla podstawowego modu drgającego, nie zamocowanego w specjalny sposób pręta, w jego środku powstaje węzeł, a w rzeczywistości powinna w tym miejscu być możliwość drgania pręta – czyli najlepiej gdyby w środku pręta powstawała strzałka.
3. Drgający kamerton jest słabym emitentem fal dźwiękowych w powietrzu i o jego funkcjonalności stanowi przede wszystkim możliwość pobudzania do drgań punktu styku stopy kamertonu z podłożem.

DRGANIA POPRZECZNE PRĘTA

Modelowy pręt przedstawia nadal rysunek 5. Korekty wymaga wprowadzenie kartezjańskiego, dwuwymiarowego $\{x, y\}$ układu odniesienia co przedstawia rysunek 10.



Rysunek 10. Położenie pręta w kartezjańskim układzie odniesienia $\{x, y\}$

Źródło: opracowanie własne.

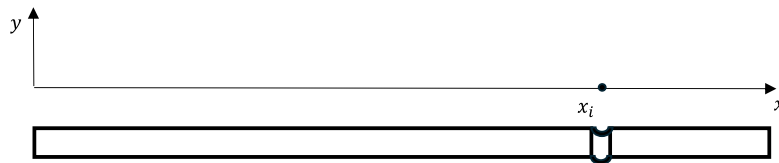
Niech w chwili początkowej w pręt w punkcie o dowolnej współrzędnej x_i uderza prostopadle do pręta młoteczek, tak jak na rysunku 11.



Rysunek 11. Uderzenie młoteczka w pręt

Źródło: opracowanie własne.

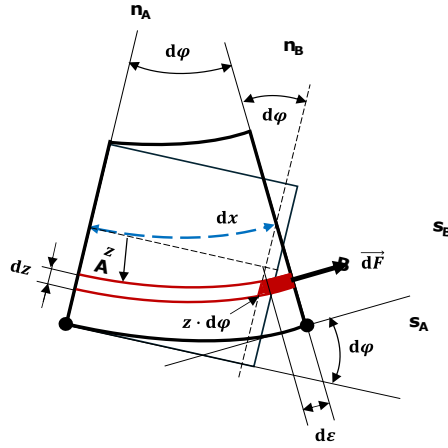
Powoduje to, że w miejscu uderzenia x_i pojawia się odkształcenie pręta w kształcie, które przypomina literę U. Można to zobrazować jak na rysunku 12.



Rysunek 12. Lokalne odkształcenie pręta w punkcie o współrzędnej x_i spowodowane uderzeniem młoteczka

Źródło: opracowanie własne.

To lokalne odkształcenie odcinka dx pręta w punkcie x_i można powiększyć, co przedstawiono na rysunku 13.



Rysunek 13. Powiększenie lokalnego odcinka dx pręta. Linia przerywana przechodząca przez środek pręta (oznaczona kolorem niebieskim) to tzw. linia (warstwa) neutralna pręta. Pod wpływem deformacji nie ulega ona ani wydłużeniu, ani skróceniu. Warstwy pręta położone powyżej warstwy neutralnej ulegają skróceniu, zaś warstwy położone poniżej ulegają wydłużeniu. s_A i s_B to styczne do zdeformowanego odcinka dx pręta w punktach A i B . n_A i n_B to tzw. normalne, czyli proste prostopadłe do stycznych odpowiednio s_A i s_B

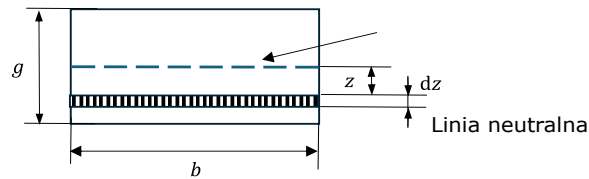
Źródło: opracowanie własne.

Celem rozwiązania zagadnienia drgań poprzecznych pręta jest znalezienie algebraicznej postaci funkcji opisującej zależność y od x dla linii neutralnej (niebieskiej na rysunku 13) czyli funkcji $y(x)$.

Niech w odległości z od linii neutralnej znajduje się warstwa o grubości dz , która ulega wydłużeniu o $d\varepsilon$. Aby to było możliwe do tej warstwy musi być przyłożona siła $d\vec{F}$, normalna do warstwy, o wartości dF i spełniająca prawo Hooke'a

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{E} \frac{dF}{dS}, \quad (38)$$

gdzie dS jest polem powierzchni przekroju warstwy o grubości dz . Przekrój poprzeczny pręta, jako prostokąta o wymiarach $b \times g$, przedstawiono na rysunku 14.



Rysunek 14. Przekrój poprzeczny pręta Źródło: opracowanie własne.

Stąd element powierzchni dS wynosi

$$dS = b \cdot dz. \quad (39)$$

Zgodnie z rysunkiem 13 deformacja $d\varepsilon$ warstwy dS wynosi

$$d\varepsilon = z \cdot d\varphi, \quad (40)$$

gdzie $d\varphi$ jest kątem pomiędzy normalnymi do wygiętego fragmentu dx pręta w punktach A i B .

Podstawiając (39) i (40) do równania (38) można wyznaczyć wartość siły normalnej dF niezbędnej do deformacji warstwy dz

$$dF = E b dz \frac{z d\varphi}{dx} = Eb \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) z dz. \quad (41)$$

Wartość całkowitego momentu siły $\vec{M}$ potrzebnego do zdeformowania fragmentu dx wynosi

$$M = \int_{-g/2}^{g/2} z dF = Eb \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \int_{-g/2}^{g/2} z^2 dz. \quad (42)$$

Występująca we wzorze całka oznaczona jest tzw. „momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki” i wynosi

$$J = b \int_{-g/2}^{g/2} z^2 dz = \frac{1}{12} b g^3. \quad (43)$$

Oznacza to, że całkowity moment siły opisuje wzór

$$M = E \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot J. \quad (44)$$

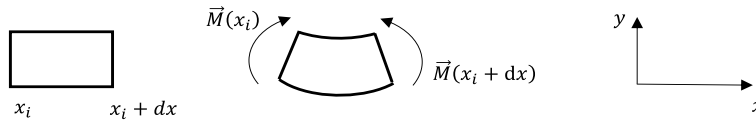
Występująca we wzorze (44) pochodna $\frac{d\varphi}{dx}$ opisuje tzw. krzywiznę K linii neutralnej, zapisanej jako funkcja $y(x)$, w punkcie x_i

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_{x_i} = K(x_i). \quad (45)$$

Wówczas wzór (44) przyjmuje postać

$$M(x_i) = E \cdot J \cdot K(x_i). \quad (46)$$

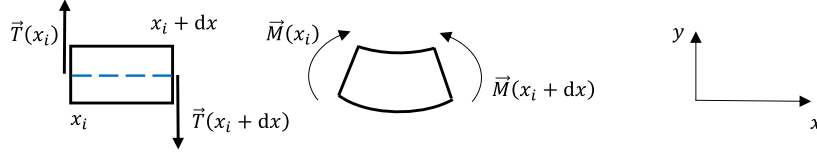
Aby fragment belki dx mógł się lokalnie wygiąć, muszą być do tego fragmentu przyłożone momenty sił $\vec{M}$ jak na rysunku 15.



Rysunek 15. Momenty sił niezbędne do zdeformowania fragmentu belki dx

Źródło: opracowanie własne.

Momentom sił towarzyszą siły $\vec{T}$ prostopadle warstwy neutralnej pręta, zwane siłami tnącymi [3]. Siłę tnącą (poprzącą) przyjmuje się jako dodatnią, gdy będzie ona dążyła do wywołania ruchu obrotowego analizowanego elementu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Można to zobrazować na rysunku 16.



Rysunek 16. Siły tnące (popręczne) przyłożone do elementu dx pręta

Źródło: opracowanie własne.

W stanie równowagi można wyznaczyć równania momentów sił względem środka ciężkości elementu dx , który to środek umieszczono w punkcie o współrzędnej $x_i + dx$

$$T(x_i) \cdot dx + M(x_i) - M(x_i + dx) - T(x_i + dx) \cdot 0 = 0. \quad (47)$$

Ale

$$M(x_i + dx) = M(x_i) + dM = M(x_i) + \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (48)$$

Stąd

$$T(x_i) \cdot dx + M(x_i) - \left[M(x_i) + \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx \right] = 0, \quad (49)$$

czyli

$$T(x_i) \cdot dx = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (50)$$

Oznacza to, że siła tnąca w punkcie o współrzędnej x_i wynosi

$$T(x_i) = \left(\frac{\partial M}{\partial x} \right)_{x_i}. \quad (51)$$

Podstawiając zależność (46) do (51) dostajemy, że siłę tę opisuje wzór

$$T(x_i) = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial x} \right)_{x_i}. \quad (52)$$

Krzywiznę linii neutralnej $y(x)$ fragmentu dx belki w punkcie x_i opisuje znany z geometrii różniczkowej [4] wzór

$$K(x_i) = \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_i}^2 \right]^{3/2}}. \quad (53)$$

Z uwagi na fakt, że element dx jest bardzo mało odkształcony

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x_i} \ll 1 \quad (54)$$

wynika, że

$$K(x_i) \cong \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i}. \quad (55)$$

Po podstawieniu wyrażenia (55) do (52) otrzymać można wzór opisujący wartość siły ścinającej

$$T(x_i) = E \cdot J \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x_i} = E \cdot J \cdot \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x_i} \quad (56)$$

Stąd wypadkowa, pionowa siła $F(x_i)$ działająca na element dx , chcąc go przywrócić do położenia równowagi, wynosi

$$F(x_i) = T(x_i) - T(x_i + dx) \quad (57)$$

i jest ona skierowana zgodnie ze zwrotem osi y na rysunku 16.

Rozwijając funkcję $T(x)$ w szereg Taylora można ograniczyć się do pierwszego wyrazu rozwinięcia

$$T(x_i + dx) \cong T(x_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (58)$$

Po podstawieniu zależności (58) do (57) wartość siły $F(x_i)$ opisuje wzór

$$F(x_i) \cong T(x_i) - \left[T(x_i) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx \right] \cong - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_i} dx. \quad (59)$$

Podstawienie wyrażenia (56) do (59) prowadzi do wzoru

$$F(x_i) \cong -EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx. \quad (60)$$

Siła ta zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona działając na masę dm elementu dx jest równa

$$F(x_i) = dm \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} = \rho S dx \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i}. \quad (61)$$

Porównując wzory (60) i (61)

$$\rho S dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} \cong -EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx. \quad (62)$$

Stąd

$$\rho S dx \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} dx \cong 0, \quad (63)$$

czyli

$$\left[\rho S \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x_i} + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right)_{x_i} \right] dx \cong 0. \quad (64)$$

Oznacza to, że równanie opisujące współrzędną y ruchu elementu dx pod wpływem uderzenia młoteczką jest postaci

$$\rho S \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + EJ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (65)$$

Jest to poszukiwane równanie różniczkowe opisujące zależność $y(x, t)$ dla linii neutralnej belki [5].

Porównując równanie (9) opisujące propagację fali podłużnej w belce z równaniem (65) opisującym propagację poprzecznego zaburzenia w belce widać, że równanie (65) nie jest klasycznym równaniem falowym.

Równanie (65) można zapisać w postaci

$$\rho \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + E \frac{J}{S} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (66)$$

Niech

$$\frac{J}{S} = \chi^2. \quad (67)$$

Stąd, w oparciu o wzór (16) kładąc, że $v_F = c$ jest prędkością fali podłużnej w pręcie

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + \frac{E}{\rho} \frac{J}{S} \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + c^2 \chi^2 \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (68)$$

Powyższe równanie można rozwiązać metodą separacji zmiennych [5]. Niech funkcja $y(x, t)$ będzie iloczynem dwóch funkcji: jednej $\Gamma(t)$ zależnej tylko od czasu oraz drugiej $\Psi(x)$ zależnej jedynie od położenia, zgodnie z równaniem

$$y(x, t) = \Gamma(t) \Psi(x). \quad (69)$$

Wówczas

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = \Psi(x) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = \Gamma(t) \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right). \quad (70)$$

Po podstawieniu (70) do (68)

$$\Psi(x) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) + (c\chi)^2 \Gamma(t) \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (71)$$

Po separacji zmiennych wzór (71) przyjmuje postać

$$\frac{1}{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) = -(c\chi)^2 \frac{1}{\Psi(x)} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right). \quad (72)$$

Można przyjąć, że lewa i prawa strona tego równania są równe pewnej ujemnej stałej $-\omega^2$

$$\frac{1}{\Gamma(t)} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) = -\omega^2 \quad (73)$$

oraz

$$-(c\chi)^2 \frac{1}{\Psi(x)} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right) = -\omega^2. \quad (74)$$

Z równania (73) wynika, że

$$\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \right) + \omega^2 \Gamma(t) = 0. \quad (75)$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja zespolona

$$\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}_0 e^{i\omega t} + \tilde{\tilde{\Gamma}}_0 e^{-i\omega t}. \quad (76)$$

Z kolei z równania (74) wynika, że

$$\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4}\right) = \left(\frac{\omega}{c\chi}\right)^2 \Psi(x). \quad (77)$$

Wprowadzając nową zmienną v taką, że

$$v^2 = \omega c\chi \quad (78)$$

równanie (77) można zapisać jako

$$\left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4}\right) = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x). \quad (79)$$

Poszukiwaną funkcją $\Psi(x)$ jest taka funkcja, której czwarta pochodna jest podobna do danej. Stąd funkcję $\Psi(x)$ przedstawić można w postaci wykładniczej

$$\Psi(x) = Ae^{\gamma x}. \quad (80)$$

Po podstawieniu zależności (80) do (79)

$$\gamma^4 Ae^{\gamma x} = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 Ae^{\gamma x}. \quad (81)$$

Oznacza to, że

$$\gamma^4 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^4. \quad (82)$$

Wzór (82) można przedstawić w postaci

$$\gamma^4 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 = \left(\gamma^2 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) \cdot \left(\gamma^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2\right) = 0. \quad (83)$$

Stąd

$$\left(\gamma - \frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma + \frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma - i\frac{\omega}{v}\right) \cdot \left(\gamma + i\frac{\omega}{v}\right) = 0. \quad (84)$$

Oznacza to, że są cztery różne γ

$$\gamma_1 = \frac{\omega}{v}, \quad \gamma_2 = -\frac{\omega}{v}, \quad \gamma_3 = i\frac{\omega}{v}, \quad \gamma_4 = -i\frac{\omega}{v} \quad (85)$$

oraz, że funkcja $\Psi(x)$ przyjmuje postać

$$\Psi(x) = A_1 e^{\gamma_1 x} + A_2 e^{\gamma_2 x} + A_3 e^{\gamma_3 x} + A_4 e^{\gamma_4 x}. \quad (86)$$

Wynika stąd, że funkcja $y(x, t)$, zgodnie ze wzorem (69), przyjmuje postać

$$\tilde{y}(x, t) = e^{i\omega t} \cdot \left[\tilde{A} e^{\frac{\omega}{v}x} + \tilde{B} e^{-\frac{\omega}{v}x} + \tilde{C} e^{i\frac{\omega}{v}x} + \tilde{D} e^{-i\frac{\omega}{v}x} \right], \quad (87)$$

gdzie $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ i $\tilde{D}$ są zespolonymi amplitudami.

Powyższe równanie nie opisuje jednak zaburzenia rozchodzącego się ze stałą prędkością fazową $v_F = c$, z jaką rozchodzi się fala podłużna w pręcie. Można to uzasadnić w następujący sposób. Gdyby rozważyć jedynie jeden ze składników w równaniu (87) np.

$$\tilde{y}(x, t) = e^{i\omega t} \cdot \tilde{D} e^{-i\frac{\omega}{v}x} = \tilde{D} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right)}, \quad (88)$$

to część rzeczywista (88) przyjmuje postać

$$y(x, t) = D \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x\right) = D \cos(\omega t - k^* x), \quad (89)$$

gdzie prędkość fazowa v_F^D rozchodzącego się powyższego zaburzenia to

$$v_F^D = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k^*} = \frac{\omega}{\left(\frac{\omega}{v}\right)} = v. \quad (90)$$

Zgodnie ze wzorem (78)

$$v_F^D = \sqrt{c\chi\omega}. \quad (91)$$

Oznacza to, że zaburzeniom o różnych częstościach ω odpowiadają różne prędkości rozchodzenia się stałej fazy. Wynika stąd, że zaburzenie poprzeczne w pręcie (w odróżnieniu od zaburzenia podłużnego) podlega zjawisku dyspersji.

Wykorzystując tożsamości trygonometryczne

$$e^{\pm\alpha} = \cosh \alpha \pm \sinh \alpha \quad (92)$$

oraz wzory Eulera

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \quad (93)$$

można ograniczyć równanie (87) do przestrzeni rzeczywistej i wówczas

$$y(x, t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (94)$$

gdzie stałe Γ_0 , A , B , C i D są już teraz amplitudami rzeczywistymi. Oznacza to, że zgodnie ze wzorami (69) i (76)

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (95)$$

oraz

$$\Psi(x) = \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right]. \quad (96)$$

Można sprawdzić, że faktycznie równanie (94) jest rozwiązaniem równania (68) opisującego rozchodzenie się drgań poprzecznych w pręcie. Druga pochodna y po czasie t wynosi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi) \cdot \Psi(x) = -\omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x). \quad (97)$$

Kolejne pochodne cząstkowe y po x wynoszą

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right) \left[A \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) - C \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (98)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) - C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) - D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (99)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^3 \left[A \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) - D \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right], \quad (100)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \left[A \cosh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + B \sinh\left(\frac{\omega}{v} x\right) + C \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \right]. \quad (101)$$

Widać, że

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x). \quad (102)$$

Po podstawieniu zależności (97) i (102) do (68) oraz uwzględniając wzór (78)

$$-\omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x) + (c\chi)^2 \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v}\right)^4 \Psi(x) = \omega^2 \cdot \Gamma(t) \cdot \Psi(x) \left[\left(\frac{c\chi\omega}{v^2}\right)^2 - 1 \right] = 0. \quad (103)$$

To potwierdza, że funkcja $y(x, t)$ opisana równaniem (94) jest rozwiązaniem równania (68) opisującego rozchodzenie się drgań poprzecznych w pręcie.

Pozostaje problem wyznaczenia amplitud A , B , C i D . Z warunków granicznych wynika, że na końcach pręta nie występują ani momenty sił ani siły ścinające. Oznacza to, że w początku pręta, dla $x = 0$ moment siły $M(x = 0) = 0$ oraz $T(x = 0) = 0$. Stąd w oparciu o wzory (52) i (55)

$$M(x = 0) = EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0. \quad (104)$$

Ale wobec związków (99) i (104)

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 [A \cosh(0) + B \sinh(0) - C \cos(0) - D \sin(0)] = 0. \quad (105)$$

Wynika stąd, że

$$A - C = 0, \quad (106)$$

czyli

$$A = C. \quad (107)$$

Z kolei w oparciu o wzór (56)

$$T(x = 0) = EJ \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = 0. \quad (108)$$

Czyli po zastosowaniu zależności (100) i wobec (108)

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 [A \sinh(0) + B \cosh(0) + C \sin(0) - D \cos(0)] = 0. \quad (109)$$

Wynika stąd, że

$$B - D = 0, \quad (110)$$

czyli

$$B = D. \quad (111)$$

Oznacza to, że równanie (94) przyjmuje postać

$$y(x, t) = \Gamma_0 \cos(\omega t + \phi) \left\{ A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}. \quad (112)$$

Wobec tego, druga i trzecia pochodna cząstkowa y po x , zgodnie ze wzorem (112), opisane są wzorami

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \left\{ A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}, \quad (113)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 \left\{ A \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}x\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] + B \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}x\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) \right] \right\}. \quad (114)$$

Stąd, wiedząc, że dla drugiego swobodnego końca pręta (czyli dla $x = L$) moment siły i siła ścinająca są również równe zero, to

$$M(x = L) = EJ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=L} = 0, \quad (115)$$

czyli

$$\Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 \left\{ A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] + B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \right\} = 0, \quad (116)$$

a także

$$T(x = L) = EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=L} = 0, \quad (117)$$

czyli

$$\Gamma(t) \left(\frac{\omega}{v} \right)^3 \left\{ A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] + B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \right\} = 0. \quad (118)$$

Z równań (116) i (118) wynika, że

$$A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] = -B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \quad (119)$$

oraz

$$A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] = -B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]. \quad (120)$$

Należy wyznaczyć takie częstotliwości ω , dla których równania (119) i (120) są równoważne. W tym celu najpierw należy pozbyć się amplitud A i B dzieląc stronami powyższe równania

$$\frac{A \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}{A \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]} = \frac{-B \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}{-B \left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]}. \quad (121)$$

Stąd

$$\frac{\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right)}{\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right)} = \frac{\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right)}{\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right)}. \quad (122)$$

Mnożąc wyrażenia we wzorze (122) na krzyż

$$\left[\cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]^2 = \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right] \cdot \left[\sinh \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin \left(\frac{\omega}{v} L \right) \right]. \quad (123)$$

Stąd

$$\cosh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - 2 \cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \cos^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) = \sinh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sin^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right), \quad (124)$$

czyli

$$\cosh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - \sinh^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) - 2 \cosh \left(\frac{\omega}{v} L \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \sin^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) + \cos^2 \left(\frac{\omega}{v} L \right) = 0. \quad (125)$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych

$$\cosh^2(\Theta) - \sinh^2(\Theta) = 1 \quad (126)$$

oraz

$$\sin^2(\Theta) + \cos^2(\Theta) = 1, \quad (127)$$

równanie (125) można przepisać w postaci

$$1 - 2 \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) + 1 = 0. \quad (128)$$

Stąd

$$\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) = 1. \quad (129)$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci

$$\cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \frac{1}{\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right)} = 0. \quad (130)$$

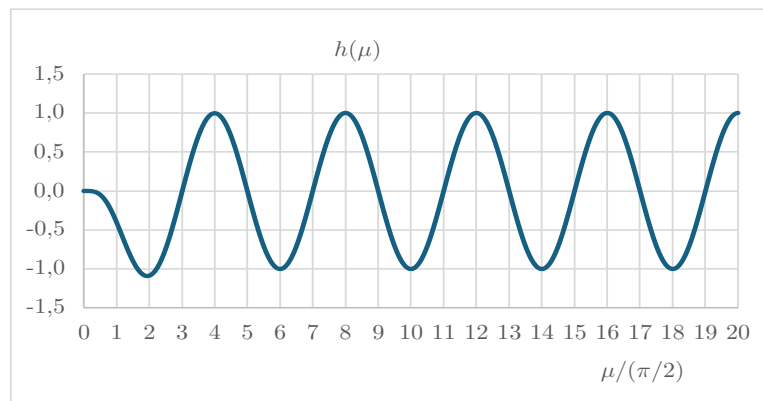
Niech zmienną μ definiuje wzór

$$\mu = \frac{\omega}{v}L. \quad (131)$$

Gdyby wprowadzić funkcję h zmiennej μ zdefiniowaną jako

$$h(\mu) = \cos(\mu) - \frac{1}{\cosh(\mu)}, \quad (132)$$

to wykres tej funkcji można przedstawić jak na rysunku 17.



Rysunek 17. Wykres funkcji $h(\mu)$

Źródło: opracowanie własne.

Z wykresu funkcji $h(\mu)$ wynika, że przyjmuje ona wartości równe zero dla argumentów μ zebranych w tabeli 1.

Tabela 1. Argumenty μ , dla których funkcja $h(\mu)$ przyjmuje wartości równe zero. Pierwiastki funkcji $h(\mu)$ wyznaczono numerycznie przy pomocy procedury Szukaj wyniku w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

i	$\mu_i/(\pi/2)$
1	3,011237462
2	4,999505341
3	7,000021359
4	8,999999077
5	11,00000004
6	13,00000000
7	15,00000000
8	17,00000000

Źródło: opracowanie własne.

Z wykresu widać wyraźnie, że wraz ze wzrostem wartości argumentów zanika wkład funkcji cosinus hiperboliczny ($\cosh$) i dominuje funkcja cosinus ($\cos$).

Kolejne częstotliwości ω_i dla których zależności (119) i (120) są sobie równoważne spełniają równania

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_1 L}{v_1} &= \frac{\pi}{2} \times 3,011237462, \\
 \frac{\omega_2 L}{v_2} &= \frac{\pi}{2} \times 4,999505341, \\
 \frac{\omega_3 L}{v_3} &= \frac{\pi}{2} \times 7,000021359, \\
 \frac{\omega_4 L}{v_4} &= \frac{\pi}{2} \times 8,999999077, \text{ itd.}
 \end{aligned} \tag{133}$$

Oznacza to, że wykorzystując wzór (78), częstotliwości f_i z jakimi może drgać pręt opisują równania

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (3,011237462)^2, \\
 f_2 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (4,999505341)^2, \\
 f_3 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (7,000021359)^2, \\
 f_4 &= \frac{\pi c \chi}{8L^2} \times (8,999999077)^2, \text{ itd.}
 \end{aligned} \tag{134}$$

Kolejne częstotliwości mają się do siebie (w przybliżeniu do czterech miejsc po przecinku) jak

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 : \dots = 1 : 2,7565 : 5,4039 : 8,9330 : \dots \tag{135}$$

Oznacza to, że kolejne częstotliwości nie są harmonicznymi częstotliwościami podstawowej f_1 , czyli nie są wielokrotnościami częstotliwości podstawowej f_1 .

Dla każdego modu drgania pręta (czyli sposobu jego drgań) zaburzenie w pręcie rozchodzi

się z inną prędkością fazową. Wykorzystując wzór (78) prędkości te opisują równania

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 3,011237462, \\ v_2 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 4,999505341, \\ v_3 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 7,000021359, \\ v_4 &= \frac{\pi c \chi}{2L} \times 8,999999077, \text{ itd.} \end{aligned} \quad (136)$$

Kolejne prędkości mają się do siebie (w przybliżeniu do czterech cyfr po przecinku) jak

$$v_1 : v_2 : v_3 : v_4 : \dots = 1 : 1,6603 : 2,3246 : 2,9889 : \dots \quad (137)$$

Do równania (125) można dojść jeszcze w inny, równoważny sposób. Równania (119) i (120) tworzą układ dwóch równań jednorodnych z dwiema niewiadomymi A i B

$$\begin{cases} A \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] + B \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] = 0, \\ A \left[\sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] + B \left[\cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \right] = 0. \end{cases} \quad (138)$$

Najprostsze rozwiązania tego równania to $A = 0$ i $B = 0$. Tyle, że wtedy zgodnie z równaniami (94), (107) i (111) $y = 0$ dla każdego x w dowolnej chwili czasu – co oznacza brak drgania pręta. Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (138) jest zerowanie się wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) & \sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) \\ \sinh\left(\frac{\omega}{v}L\right) + \sin\left(\frac{\omega}{v}L\right) & \cosh\left(\frac{\omega}{v}L\right) - \cos\left(\frac{\omega}{v}L\right) \end{vmatrix} = 0, \quad (139)$$

co prowadzi do związku (123).

Rozwiązanie równania (129) umożliwia uzyskanie zbioru $\omega_i \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots\}$, którego cztery pierwsze wyrazy to ω_i występujące w równaniach (133). Każdemu ω_i odpowiada para niezerowych amplitud $A^{(i)}$ oraz $B^{(i)}$ spełniających równanie

$$\begin{cases} A^{(i)} \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] + B^{(i)} \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] = 0, \\ A^{(i)} \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) + \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] + B^{(i)} \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) \right] = 0. \end{cases} \quad (140)$$

Gdyby przyjąć, że $A^{(i)}$ jest znane to wówczas z dowolnego z równań (140) można wyznaczyć $B^{(i)}$. Na przykład wykorzystując pierwsze z równań (140)

$$B^{(i)} = - \frac{\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right)}{\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i}L\right)} A^{(i)}. \quad (141)$$

Wówczas równanie (112) przyjmuje postać

$$y(x, t) = A^{(i)} \cdot \cos(\omega_i t + \phi) \cdot \left\{ \left[\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) + \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) \right] - \left[\frac{\cosh\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right) - \cos\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right)}{\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right) - \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i} L\right)} \right] \cdot \left[\sinh\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) + \sin\left(\frac{\omega_i}{v_i} x\right) \right] \right\}. \quad (142)$$

Amplituda $A^{(i)}$ zależy od warunków początkowych.

Niech np. $L = 1$ m. Wówczas zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_1 = v_1 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 3,011237462 \text{ s}^{-1} \quad (143)$$

oraz

$$\frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\pi}{2L} \times 3,011237462 \cong 4,73 \text{ m}^{-1}. \quad (144)$$

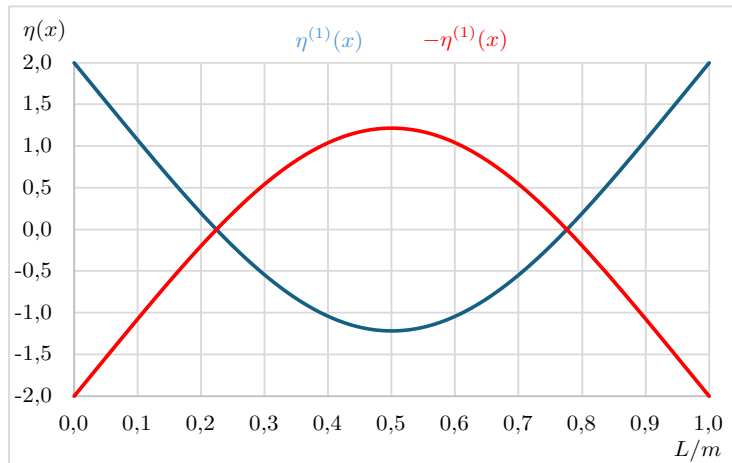
Równanie (142) przyjmuje wówczas postać

$$y(x, t) = A^{(1)} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(4,73x) + \cos(4,73x)] - \left[\frac{\cosh(4,73) - \cos(4,73)}{\sinh(4,73) - \sin(4,73)} \right] \cdot [\sinh(4,73x) + \sin(4,73x)] \right\}. \quad (145)$$

Można zdefiniować funkcję $\eta^{(1)}(x)$

$$\eta^{(1)}(x) = [\cosh(4,73x) + \cos(4,73x)] - 0,9825 \cdot [\sinh(4,73x) + \sin(4,73x)]. \quad (146)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(1)}(x)$ oraz $-\eta^{(1)}(x)$ przedstawiono na rysunku 18.



Rysunek 18. Wykresy funkcji $\eta^{(1)}(x)$ oraz $-\eta^{(1)}(x)$
Źródło: opracowanie własne.

Z wykresów widać, że strzałka drgań pręta występuje w jego środku (dla $x_s^{(1)} = 0,500$ m). Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(1)} \cong 0,224$ m oraz dla $x_{w_2}^{(1)} \cong 0,776$ m. Taki sposób drgania pręta nazywa się modem podstawowym drgań poprzecznych.

Gdyby utrzymać założenie, że $L = 1$ m to dla drugiego modu drgań, zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 4,999505341 \text{ s}^{-1} \quad (147)$$

oraz

$$\frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\pi}{2L} \times 4,999505341 \cong 7,85 \text{ m}^{-1}. \quad (148)$$

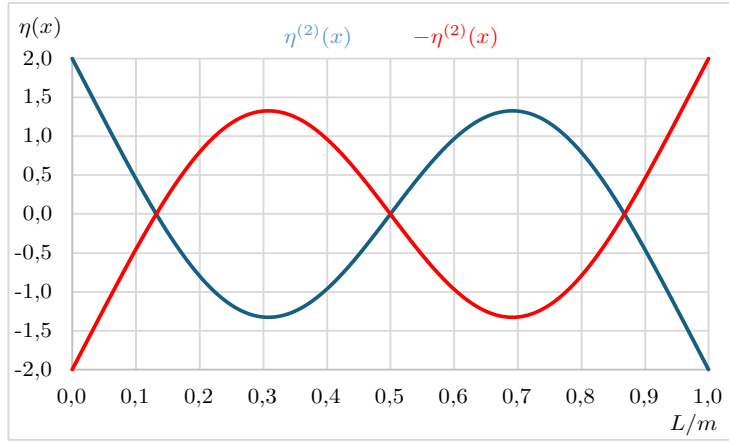
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(2)} \cdot \cos(\omega_2 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(7,85x) + \cos(7,85x)] - \left[\frac{\cosh(7,85) - \cos(7,85)}{\sinh(7,85) - \sin(7,85)} \right] \cdot [\sinh(7,85x) + \sin(7,85x)] \right\}. \quad (149)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(2)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(2)}(x) = [\cosh(7,85x) + \cos(7,85x)] - 1,0008 \cdot [\sinh(7,85x) + \sin(7,85x)]. \quad (150)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(2)}(x)$ oraz $-\eta^{(2)}(x)$ przedstawiono na rysunku 19.



Rysunek 19. Wykresy funkcji $\eta^{(2)}(x)$ oraz $-\eta^{(2)}(x)$

Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(2)} \cong 0,308$ m oraz $x_{s_2}^{(2)} \cong 0,692$ m. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(2)} \cong 0,132$ m, $x_{w_2}^{(2)} \cong 0,500$ m oraz dla $x_{w_3}^{(2)} \cong 0,868$ m.

Dla trzeciego modu drgań, zgodnie ze wzorem (133)

$$\omega_3 = v_3 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 7,000021359 \text{ s}^{-1} \quad (151)$$

oraz

$$\frac{\omega_3}{v_3} = \frac{\pi}{2L} \times 7,000021359 \cong 11,00 \text{ m}^{-1}. \quad (152)$$

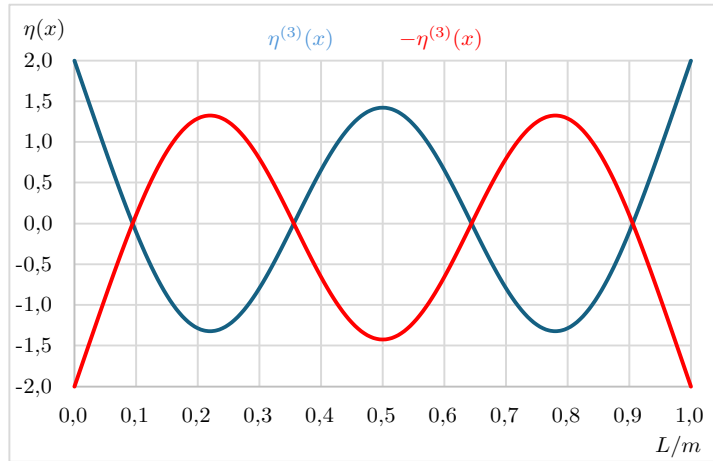
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(3)} \cdot \cos(\omega_3 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(11x) + \cos(11x)] - \left[\frac{\cosh(11) - \cos(11)}{\sinh(11) - \sin(11)} \right] \cdot [\sinh(11x) + \sin(11x)] \right\}. \quad (153)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(3)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(3)}(x) = [\cosh(11x) + \cos(11x)] - 1,0000 \cdot [\sinh(11x) + \sin(11x)]. \quad (154)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(3)}(x)$ oraz $-\eta^{(3)}(x)$ przedstawiono na rysunku 20.



Rysunek 20. Wykresy funkcji $\eta^{(3)}(x)$ oraz $-\eta^{(3)}(x)$
Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(3)} \cong 0,220 \text{ m}$, $x_{s_2}^{(3)} \cong 0,500 \text{ m}$ oraz $x_{s_3}^{(3)} \cong 0,780 \text{ m}$. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(3)} \cong 0,094 \text{ m}$, $x_{w_2}^{(3)} \cong 0,356 \text{ m}$, $x_{w_3}^{(3)} \cong 0,644 \text{ m}$ oraz dla $x_{w_4}^{(3)} \cong 0,906 \text{ m}$.

Dla czwartego modu drgań, zgodnie z zależnością (133)

$$\omega_4 = v_4 \cdot \frac{\pi}{2L} \times 8,999999077 \text{ s}^{-1} \quad (155)$$

oraz

$$\frac{\omega_4}{v_4} = \frac{\pi}{2L} \times 8,999999077 \cong 14,14 \text{ m}^{-1}. \quad (156)$$

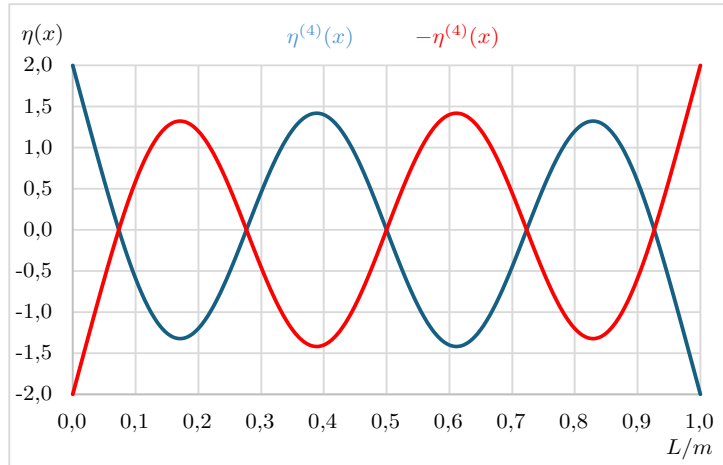
Równanie (142) przyjmuje w tym przypadku postać

$$y(x, t) = A^{(4)} \cdot \cos(\omega_4 t + \phi) \cdot \left\{ [\cosh(14,14x) + \cos(14,14x)] - \left[\frac{\cosh(14,14) - \cos(14,14)}{\sinh(14,14) - \sin(14,14)} \right] \cdot [\sinh(14,14x) + \sin(14,14x)] \right\}. \quad (157)$$

Wówczas funkcja $\eta^{(4)}(x)$ przyjmuje postać

$$\eta^{(4)}(x) = [\cosh(14,14x) + \cos(14,14x)] - 1,0000 \cdot [\sinh(14,14x) + \sin(14,14x)]. \quad (158)$$

Wykresy funkcji $\eta^{(4)}(x)$ oraz $-\eta^{(4)}(x)$ przedstawiono na rysunku 21.



Rysunek 21. Wykresy funkcji $\eta^{(4)}(x)$ oraz $-\eta^{(4)}(x)$
Źródło: opracowanie własne.

Z powyższych wykresów widać, że strzałki drgań pręta występują dla $x_{s_1}^{(4)} \approx 0,171 \text{ m}$, $x_{s_2}^{(4)} \approx 0,389 \text{ m}$, $x_{s_3}^{(4)} \approx 0,611 \text{ m}$ oraz $x_{s_4}^{(4)} \approx 0,829 \text{ m}$. Z kolei węzły drgań występują dla $x_{w_1}^{(4)} \approx 0,073 \text{ m}$, $x_{w_2}^{(4)} \approx 0,277 \text{ m}$, $x_{w_3}^{(4)} \approx 0,500 \text{ m}$, $x_{w_4}^{(4)} \approx 0,723 \text{ m}$ oraz dla $x_{w_5}^{(4)} \approx 0,927 \text{ m}$.

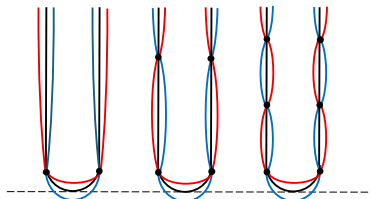
W analogiczny sposób można przedstawiać kolejne mody drgań. Z wykresów na rysunkach od 18 do 21 wynika, że o sposobie drgania pręta decyduje sposób jego podparcia. Dobierając punkty podparcia tak, aby znajdowały się one w miejscach położenia węzłów dla poszczególnych modów, można wybrać konkretny poprzeczny mod drgania. Charakterystyczne jest to, że dla poprzecznych modów będących nieparzystymi wielokrotnościami modu podstawowego w środku pręta występują strzałki. Dla parzystych wielokrotności poprzecznego modu podstawowego w środku pręta pojawia się węzeł.

Wykorzystując drgający pręt jako źródło dźwięku podpira się go w węzłach poprzecznego modu podstawowego przedstawionego na rysunku 18. Między innymi z powodu tego, że węzły pozostałych modów znajdują się w innych miejscach niż dla modu podstawowego, mody wyższych rzędów są silnie tłumione. Stanowi to jeden z podstawowych powodów wykorzystania podpartych prętów drewnianych lub metalowych do budowy melodycznych idiofonów sztabkowych czyli instrumentów perkusyjnych typu ksylofon, marimba (drewniane pręty) czy dzwonki, wibrafon, celesta (metalowe pręty).

Drgający poprzecznie pręt można *jakościowo* wykorzystać do wyjaśnienia działania kamertonu. Dla podstawowego modu poprzecznego drgań pręta, w środku pręta jest strzałka. Wygięcie pręta w kształcie litery U oraz dołączenie w środku pręta stopy powoduje, że węzły takiego drgania zbliżają się do środka pręta [2]. Niemniej stopa kamertonu silnie drga. O częstotliwości drgań kamertonu, podobnie jak pręta, decydują zgodnie ze wzorami (133) i (78):

1. materiał, z jakiego wykonano pręt – gęstość objętościowa ρ_V oraz moduł Younga E wpływają na wartość prędkości $c = v_F$ drgań podłużnych w pręcie;
2. założenia konstrukcyjne:
 - (a) długość ramion kamertonu – ok. $L/2$,
 - (b) typ przekroju poprzecznego pręta z jakiego wykonany jest pręt – współczynnik χ jako funkcja S pola przekroju pręta oraz J momentu bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Uderzenie młoteczkiem w jedno z ramion kamertonu pobudza w nim drgania złożone z wielu drgań nieharmonicznych, schematycznie przedstawionych na rysunku 22.



Rysunek 22. Schematyczne drgania ramion kamertonu dla kilku pierwszych drgań nieharmonicznych

Źródło: opracowanie własne.

Wraz z upływem czasu wyższe nieharmoniczne drgania zanikają i pozostaje prawie tylko drganie podstawowe. Ewidentnie pomaga w tym pudło rezonansowe, którego konstrukcja preferuje drganie o częstotliwości podstawowej. Pudło wzmacnia i wydłuża czas działania kamertonu [1].

3. PODSUMOWANIE

Przedstawiony w pracy opis drgań podłużnych i poprzecznych pręta pokazuje, że w przypadku wykorzystania drgającego pręta, jako elementu będącego źródłem fal mechanicznych w powietrzu decydujące znaczenie ma sposób zamocowania pręta oraz sposób pobudzania pręta do drgań.

Podłużne drgania pręta znalazły między innymi zastosowanie w tzw. rurze Kundta, gdzie warunkiem wzbudzenia drgań pręta są:

- (a) zamocowanie pręta na sztywno (w jednym miejscu pośrodku lub w dwóch miejscach) tak, aby na jego końcach powstała strzałka;
- (b) przesuwanie z niewielkim naciskiem szmatki nasączonej kalafonią (sproszkowaną mieszaniną kwasów żywicznych, służącą do zwiększenia szorstkości materiału szmatki, co skutkuje wzrostem przyczepności szmatki do podłoża) wzdłuż pręta w celu wzbudzenia w nim drgań podłużnych.

Modele drgań poprzecznych pręta opisują działanie szeregu instrumentów idiofonicznych takich jak

- dzwonki, ksylofony itp., gdzie źródłem dźwięku jest swobodny, jedynie podparty pręt;
- harmonijka ustna czy akordeon, gdzie źródłem dźwięku jest tzw. stroik – czyli zamocowany na jednym końcu drgający pręt wprowadzany w ruch przez powietrze – stąd często ten typ instrumentów przypisany jest do tzw. aerofonów.

Próba wykorzystania opisu drgań podłużnych pręta do wyjaśnienia działania kamertonu, czyli źródła dźwięku o zadanej częstotliwości jest całkowicie błędna głównie z dwóch powodów:

- (a) pręt (zgięty) w kamertonie nie jest w żadnym ustalonym miejscu sztywno zamocowany i dlatego nieuprawnione wydaje się założenie, że jego drgania to drgania podłużne;
- (b) sposób wzbudzania drgań polega na uderzeniu młoteczką w jedno z ramion kamertonu – czyli wytworzeniu w kamertonie fali poprzecznej.

Niemniej, dokładny model drgań kamertonu wymaga uwzględnienia między innymi:

- (a) niejednorodności rozkładu masy drgającego pręta, wynikającej zarówno z dołączenia do niego stopy jak i ewentualnego zastosowania dodatkowych przesuwanych mas na ramionach kamertonu w celu niewielkiej korekty podstawowej częstotliwości jego drgań;
- (b) drgań skrętnych ramion kamertonu,

co nie zostało rozważone w powyższej pracy.

LITERATURA

- [1] Golachowski S., Drobner M., *Akustyka Muzyczna*, Polskie Wydawnictwo Muzyczne, Kraków 1953.
- [2] Szczeniowski Sz., *Fizyka Doświadczalna, Część 1, Mechanika i Akustyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1972.
- [3] Kurowski R., Niezgodziński M.E., *Wytrzymałość Materiałów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1965.
- [4] Leja F., *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.
- [5] Kinsler L.E., *Fundamentals of Acoustic*, John Wiley & Sons, Nowy Jork–Londyn 1962.

ŁUKASZ PISKORSKI¹

MODELOWANIE AZOTKOWYCH LASERÓW O EMISJI KRAWĘDZIOWEJ, W KTÓRYCH ZASTOSOWANO PODEJŚCIE SUPERSYMETRYCZNE

¹ Photonics Group, Institute of Physics, Lodz University of Technology, ul. Wólczńska 217/221, 93-005 Łódź, Poland

Zwiększenie mocy laserów półprzewodnikowych zwykle wiąże się z poszerzaniem obszaru czynnego, w którym generowane jest promieniowanie. Prowadzi to jednak do przejścia pracy z trybu jednomodowego do wielomodowego, co w wielu zastosowaniach jest niepożądane. Dlatego poszukuje się rozwiązań pozwalających na jednoczesne uzyskanie wysokiej mocy i stabilnej pracy w trybie pojedynczego modu poprzecznego. Jednym z obiecujących kierunków jest podejście supersymetryczne, wynikające z analogii pomiędzy równaniami Schrödingera i Helmholtza, które znalazło zastosowanie w optyce falowej i umożliwia skuteczne tłumienie modów wyższego rzędu.

W niniejszej pracy podejście supersymetryczne zostało zastosowane w strukturze bazującej na azotkowym laserze o emisji krawędziowej emitującym światło niebieskie o długości fali 430 nm. W pracy badany jest wpływ parametrów geometrycznych struktury oraz parametrów warstwy czynnej na skuteczną dyskryminację modów wyższego rzędu w strukturze z dwoma falowodami grzbietowymi. Do tej pory w literaturze przedstawiono podobne analizy dla laserów arsenkowych i fosforkowych, natomiast podejście supersymetryczne w przypadku laserów azotkowych nie zostało jeszcze dokładnie zbadane.

Otrzymane wyniki wskazują, że zastosowanie podejścia supersymetrycznego w azotkowych laserach o emisji krawędziowej umożliwia uzyskanie pracy w trybie pojedynczego modu poprzecznego również przy szerszym obszarze czynnym. Parametr zwany względną separacją modów, zastosowany do porównania badanych laserów, osiągnął w supersymetrycznej strukturze wartość około 3,5, co oznacza, że separacja modów jest ponad trzykrotnie większa niż w strukturze referencyjnej z pojedynczym falowodem grzbietowym. Wynik ten wskazuje, że struktury oparte na podejściu supersymetrycznym mogą stanowić szczególnie korzystne rozwiązanie w projektowaniu przyrządów przeznaczonych do zastosowań wymagających wyższej mocy optycznej.

Słowa kluczowe: lasery półprzewodnikowe, symulacja komputerowa, model numeryczny, półprzewodnikowe materiały azotkowe, modelowanie zjawisk optycznych

1. WSTĘP

Lasery azotkowe o dużej mocy, emitujące promieniowanie w postaci wiązki gaussowskiej o małej rozbieżności, stanowią atrakcyjne źródło światła do wielu zastosowań. Wykorzystywane są m.in. w chirurgii laserowej [1], obróbce materiałów [2] i druku 3D [3].

^{*}lukasz.piskorski@p.lodz.pl

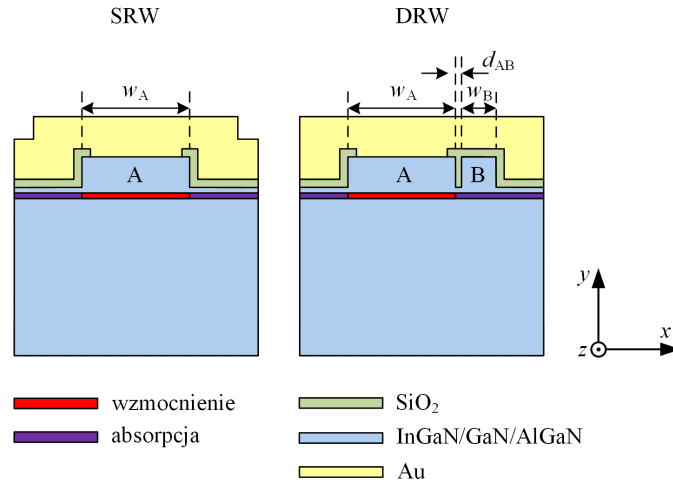
Uzyskanie akcji laserowej na pojedynczym modzie poprzecznym w laserach o emisji krawędziowej jest zazwyczaj możliwe dzięki zastosowaniu wąskiego falowodu grzbietowego [4] lub falowodu grzbietowego otrzymanego poprzez płytkie trawienie struktury [5]. Efekt falowodowy w takich laserach występuje w kierunku poprzecznym, ponieważ efektywny współczynnik załamania w obszarze falowodu grzbietowego jest wyższy niż w obszarach z nim sąsiadujących. Wąski falowód grzbietowy ogranicza mod podstawowy i jednocześnie tłumi lub eliminuje mody wyższego rzędu. Takie rozwiązanie ma jednak swoje wady. Powierzchnia przez którą prąd jest wstrzykiwany do warstwy czynnej ze studniami kwantowymi jest wtedy niewielka, co ogranicza objętość obszaru czynnego i obniża moc optyczną lasera. Dodatkowo wąski obszar czynny przekłada się na wysoką gęstość mocy cieplnej, przez co odprowadzanie ciepła staje się problematyczne. Sytuacja jest inna w przypadku płytkiego falowodu grzbietowego, który wprowadza jedynie niewielki skok współczynnika załamania w kierunku poprzecznym. Pozwala to na tłumienie modów wyższego rzędu również w strukturach z szerszymi falowodami grzbietowymi, co sprzyja pracy jednomodowej i daje szansę uzyskania większej mocy optycznej. Z drugiej jednak strony, słabszy efekt falowodowy przekłada się na wyższe wartości prądu progowego. Obserwuje się wtedy wzrost temperatury, która wpływa na wartości współczynników załamania użytych materiałów. Otrzymany w ten sposób rozkład tej wielkości wzmacnia efekt falowodowy i sprzyja powstawaniu modów wyższego rzędu. W efekcie praca lasera staje się wielomodowa [6].

Aby obejść te ograniczenia i uzyskać pracę jednomodową na modzie podstawowym, w niniejszej pracy wykorzystano sprzężenie optyczne pomiędzy sąsiednimi falowodami grzbietowymi — rozwiązanie znane jako podejście supersymetryczne. Koncepcja supersymetrii narodziła się w fizyce cząstek, później była rozwijana w mechanice kwantowej, a dzięki analogii pomiędzy równaniami Schrödingera i Helmholtza znalazła również zastosowanie w optyce falowej [7], szczególnie w układach sprzężonych falowodów [8], gdzie charakterystyka modowa zależy od sposobu ich sprzężenia. Klasycznym przykładem działania supersymetrii jest tu para sprzężonych falowodów o różnych parametrach, w której wszystkie mody mają te same stałe propagacji w obu falowodach [9]. Wyjątek stanowi mod podstawowy w pierwszym z falowodów, który nie posiada odpowiednika w drugim. W rezultacie wszystkie mody mające swoje odpowiedniki propagują się w obu falowodach, a tylko mod podstawowy pozostaje zlokalizowany w pierwszym falowodzie.

W niniejszej pracy podejście supersymetryczne zostało zastosowane w azotkowym laserze o emisji krawędziowej (rysunek 1), aby uzyskać lepsze parametry pracy na modzie podstawowym. Struktura takiego lasera, dalej nazywana DRW (ang. *double-ridge waveguide* — struktura z podwójnym falowodem grzbietowym), składa się z dwóch falowodów: szerszego (A) i węższego (B). Dla porównania analizowana jest również klasyczna struktura z pojedynczym falowodem grzbietowym, dalej nazywana SRW (ang. *single-ridge waveguide* — struktura z pojedynczym falowodem grzbietowym). Obszary znajdujące się pod falowodami grzbietowymi będą nazywane aper turami.

W strukturze DRW, jeśli szerokości falowodów grzbietowych A i B zostaną do-

brane tak, aby tryby wyższego rzędu w A miały te same współczynniki załamania co tryby w B, wówczas ulegają one sprzężeniu a ich rozkłady rozpraszają się w obu aperturach. Tryb podstawowy, który nie ma odpowiednika w falowodzie B, pozostaje ograniczony do falowodu A. W pracy tryby w strukturach SRW i DRW będą oznaczane odpowiednio TE_i^{SRW} i TE_i^{DRW} , przy czym $i = 0$ będzie stosowane dla trybu podstawowego, a liczby dodatnie dla i będą stosowane dla trybów wyższego rzędu. Ponieważ badania opisane w pracy skupiają się głównie na dyskryminacji trybów, sposób ich numerowania nie ma wpływu na wyniki. Przyjęta została prosta zasada: wyższe tryby będą porządkowane malejąco według części rzeczywistej efektywnego współczynnika załamania.



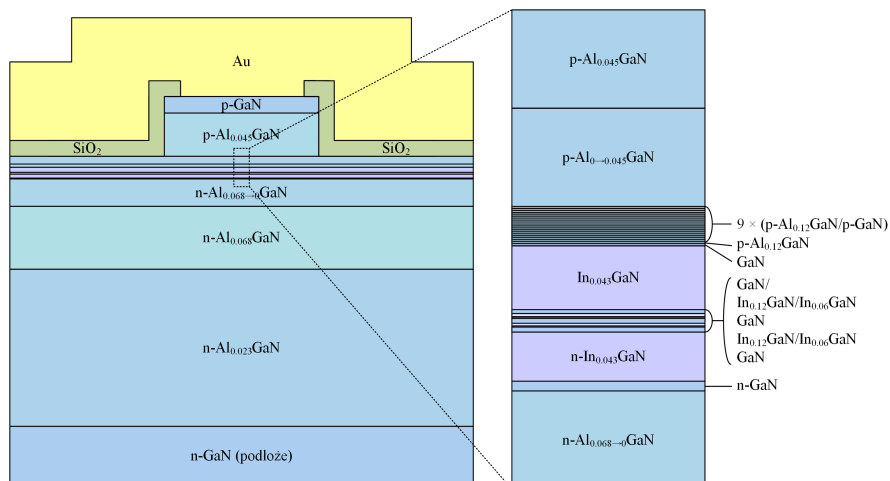
Rysunek 1. Schematyczne przedstawienie struktur laserów krawędziowych z pojedynczym (SRW) i podwójnym (DRW) falowodem grzbietowym, badanych w niniejszej pracy, wraz z układem współrzędnych zastosowanym w analizie. Oznaczenia: w_A , w_B — szerokości falowodów A i B; d_{AB} — odległość między falowodami A i B

Źródło: opracowanie własne.

W pracy badany jest wpływ szerokości falowodu B, który zapewnia skuteczną dyskryminację trybów wyższego rzędu w strukturze DRW. Analizowany jest także wpływ części urojonej współczynnika załamania w warstwie czynnej. Rozkład tej wielkości zależy od wartości wzmocnienia i absorpcji przyjętych w warstwach studni kwantowych. Do tej pory w literaturze opisano podobne analizy dla laserów arsenkowych [10–12] i fosforkowych [13], natomiast podejście supersymetryczne w przypadku laserów azotkowych nie zostało jeszcze dokładnie zbadane. Materiały azotkowe wyróżniają się mniejszym kontrastem współczynnika załamania niż materiały arsenkowe i fosforkowe, a także krótszą długością fali emitowanego promieniowania.

2. MODELOWANA STRUKTURA

Struktura wyjściowa do badań teoretycznych stanowiących przedmiot niniejszej pracy to półprzewodnikowy laser azotkowy o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* (z falowodem grzbietowym) z obszarem czynnym w postaci studni kwantowych In-GaN/GaN generujący promieniowanie o długości fali 430 nm. Obecna technologia umożliwia wytwarzanie takich struktur, czego potwierdzeniem są zmierzone eksperymentalnie charakterystyka prądowo-napięciowa oraz charakterystyka wyjściowej mocy optycznej w funkcji prądu, które zostały zaprezentowane w [14]. Modelowana struktura wyjściowa, schematycznie przedstawiona na rysunku 2, bazuje na strukturze pojedynczego emitera przedstawionego w [14] zaprojektowanego do emisji promieniowania o długości fali 430 nm i jest podobna do konstrukcji opisanych w [15–17], które opracowano tak, by w temperaturze pokojowej generowały światło niebieskie o długości fali z przedziału 442–450 nm.



Rysunek 2. Schemat struktury lasera półprzewodnikowego o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* z obszarem czynnym InGaN/GaN. W celu lepszego uwidocznienia szczegółów konstrukcji pokazano jedynie niewielką część podłoża oraz ograniczono szerokość fragmentu struktury do 6 μm . Prawą część rysunku, ukazującą fragment struktury obejmujący warstwy o małej grubości, przedstawiono w powiększeniu, w innej skali niż część lewą. Dla uproszczenia zapisu, na rysunku oraz w dalszej części pracy skład materiałowy dla materiałów AlGaN oraz InGaN podawany jest wyłącznie poprzez wartość określającą zawartość Al lub In. Zawartość Ga równa jest różnicy 1 i zawartości Al lub In

Źródło: opracowanie własne.

Szczegóły budowy struktury wyjściowej takie jak materiały z których wykonano warstwy, typ domieszkowania i koncentracja domieszki, grubości warstw przedstawiono w tabeli 1. W celu uzyskania falowodu grzbietowego wytrawiono warstwę podkontaktową wykonaną z p-GaN i wykonaną z p-Al_{0,045}GaN część warstwy okładkowej

Tabela 1. Szczegóły struktury lasera półprzewodnikowego o emisji krawędziowej typu *ridge-waveguide* z obszarem czynnym InGaN/GaN. W tabeli pominięte zostały grubości warstw znajdujących się po dolnej stronie podłoża, ponieważ obliczenia stanowiące przedmiot niniejszej pracy skupiają się na modelowaniu zjawisk optycznych, co umożliwia ograniczenie struktury od dołu tak, że jedynie niewielki fragment podłoża jest uwzględniany w obliczeniach

Element lasera	Materiał	Koncentracja domieszki [10^{18} cm^{-3}]	Grubość [nm]
kontakt metaliczny	Au	—	1000
izolacja tlenkowa	SiO ₂	—	200
warstwa podkontaktowa	GaN:Mg	5,0	210
warstwa okładkowa	Al _{0,045} GaN:Mg	5,0	550
warstwa okładkowa	Al _{0→0,045} GaN:Mg	2,0 → 5,0	100
warstwa blokująca ucieczkę nośników	9 × (GaN:Mg / Al _{0,12} GaN:Mg) Al _{0,12} GaN:Mg)	40,0	9 × (2,0 / 2,0) 2,0
warstwa dystansująca	GaN	—	2,0
warstwa falowodowa	In _{0,043} GaN	—	65,0
bariera	GaN	—	4,0
studnia kwantowa (głęboka/płytki)	In _{0,12} GaN / In _{0,06} GaN	—	3,1 / 1,3
bariera	GaN	—	5,0
studnia kwantowa (głęboka/płytki)	In _{0,12} GaN / In _{0,06} GaN	—	3,1 / 1,3
bariera	GaN	—	5,0
warstwa falowodowa	In _{0,043} GaN:Si	2,0	50,0
warstwa dystansująca	GaN:Si	5,0	10,0
warstwa okładkowa	Al _{0,068→0} GaN:Si	5,0	350
warstwa okładkowa	Al _{0,068} GaN:Si	5,0	800
warstwa buforowa	Al _{0,023} GaN:Si	5,0	2000
podłoże	GaN:Si	5,0	3×10^5

Źródło: opracowanie własne na podstawie [14].

typu p na głębokość 710 nm. W kierunku bocznym pozostawiona jest mesa o szerokości 2,0 μm. Długość emitera opisanego w [14] to 900 μm, ale w prezentowanych tu obliczeniach nie ma ona znaczenia, ponieważ dotyczą one przypadku dwuwymiarowego, ograniczonego do płaszczyzny przedstawionej na rysunku 2. Izolacja tlenkowa, która pokrywa obszary odsłonięte w wyniku trawienia, wykonana jest z amorficznego SiO₂ i ma grubość 200 nm. W obliczeniach przyjęto, że warstwa ta częściowo

pokrywa falowód, zachodząc na niego na odległość równą swojej grubości. W modelowanej strukturze nad tą warstwą znajduje się warstwa złota o grubości 1 μm , która ma kontakt z warstwą podkontaktową jedynie od górnej strony falowodu grzbietowego.

Obszar czynny modelowanego lasera jest niedomieszkowany (patrz: tabela 1) i został wykonany w postaci dwóch studni kwantowych wykonanych z InGa_N rozdzielonych barierami wykonanymi z Ga_N. Na każdą ze studni składają się dwie warstwy In_{0,06}Ga_N o grubości 1,3 nm i In_{0,12}Ga_N o grubości 3,1 nm. Całkowita grubość obszaru czynnego to 22,8 nm, ale niedomieszkowany obszar nie ogranicza się jedynie do obszaru czynnego. Zaliczają się do niego jeszcze dwie warstwy znajdujące się nad górną barierą: warstwa falowodowa o grubości 65 nm wykonana z In_{0,043}Ga_N i cienka (2 nm) warstwa utworzona z Ga_N. W pracy [14] górna warstwa falowodowa jest domieszkowana, ale istnieją też prace [16–18], gdzie warstwy tej się nie domieszkuje, aby uniknąć strat optycznych spowodowanych dużą absorpcją promieniowania typową dla materiałów azotkowych typu p [19, 20]. Dopiero 67 nm nad obszarem czynnym znajduje się pierwsza warstwa typu p, która wraz z kilkunastoma kolejnymi cienkimi (2 nm) naprzemiennie ułożonymi warstwami p-Al_{0,12}Ga_N i p-Ga_N tworzy obszar nazywany warstwą blokującą ucieczkę nośników z obszaru czynnego do warstw typu p. Obszar ten sąsiaduje od góry ze wcześniej wspomnianą warstwą okładkową typu p. Po przeciwnej stronie obszaru czynnego znajduje się warstwa falowodowa wykonana z In_{0,043}Ga_N typu n o grubości 50 nm. Kolejne warstwy to: wykonana z n-Ga_N warstwa dystansująca, warstwa okładkowa typu n (część tej warstwy ma zmienny skład materiałowy umożliwiający płynne przejście od n-Al_{0,068}Ga_N do n-Ga_N), warstwa buforowa wykonana z n-Al_{0,023}Ga_N i podłoże utworzone z n-Ga_N.

W pracy [14], gdzie badania skupiają się na modelowaniu zagadnień cieplnych, nie zostały podane koncentracje domieszkowania. Do obliczeń będących przedmiotem niniejszej pracy, przyjęto, że koncentracja domieszki donorowej wynosi $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ [16]. Jedynym wyjątkiem jest dolna warstwa falowodowa, dla której założona została koncentracja $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ z uwagi na to, że warstwa ta sąsiaduje z obszarem czynnym i wprowadzenie domieszki o większej koncentracji domieszki może przekładać się na stosunkowo duże straty optyczne w tej warstwie. Dla warstwy podkontaktowej i górnej warstwy okładkowej przyjęto koncentrację domieszki wynoszącą $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Dużo wyższa koncentracja domieszki wynosząca $4 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ [17] została przyjęta dla warstwy blokującej ucieczkę nośników. W przypadku górnej warstwy okładkowej o zmiennym składzie materiałowym założono, że wartość koncentracji domieszki zmienia się w sposób ciągły od $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ do $5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$.

3. MODEL NUMERYCZNY I PARAMETRY MATERIAŁOWE

Zjawiska optyczne w strukturach badanych w niniejszej pracy modelowane są przy użyciu metody admitancyjnej fal płaskich [21]. Metoda ta umożliwia obliczenie efektywnych współczynników załamania światła dla poszczególnych modów promieniowania i odpowiadające im przestrzenne rozkłady tych modów.

Wszystkie obliczenia, które zostały wykonane w ramach badań opisanych w ni-

niejszej pracy zostały przeprowadzone dla 150 fal płaskich. Wartość ta została określona na podstawie wstępnych obliczeń wykonanych dla struktury z jednym falowodem grzbietowym o szerokości $5,5\ \mu\text{m}$. Szerokość ta jest prawie trzykrotnie większa niż w przypadku struktury wyjściowej, jednak mając na uwadze główną część obliczeń, która dotyczy struktury z dwoma falowodami grzbietowymi i jej optymalizacji, zdecydowano by wybór liczby fal płaskich został dokonany w oparciu o wartość łącznej szerokości falowodów, której można się spodziewać dla struktury zbliżonej do optymalnej. W celu uproszczenia sposobu generowania plików wsadowych do obliczeń, liczba fal płaskich dla głównych obliczeń nie zależy od łącznej szerokości okna obliczeniowego. Przez okno to rozumiany jest tutaj dwuwymiarowy obszar struktury lasera różniący się od tego ukazanego na rysunku 2 jedynie tym, że dolna krawędź tego obszaru przypada na miejsce styku warstwy buforowej i podłoża. W kierunku poziomym rozmiar okna obliczeniowego zależy od szerokości falowodu grzbietowego (w przypadku struktury z jednym falowodem) lub od łącznej szerokości dwóch falowodów grzbietowych i szerokości przerwy między tymi falowodami (w przypadku struktury z dwoma falowodami). Na szerokość okna obliczeniowego

Tabela 2. Wartości współczynnika załamania i współczynnika absorpcji obliczone dla materiałów składających się na modelowane w niniejszej pracy struktury. Wszystkie wartości podano dla długości fali $430\ \text{nm}$ i temperatury $300\ \text{K}$. W przypadku warstw niedomieszkowanych, gdzie występuje nieintencjonalna domieszka, nie uwzględniono jej przy wyznaczeniu parametrów, ponieważ koncentracja takiej domieszki jest bardzo mała ($\sim 1 \times 10^{17}\ \text{cm}^{-3}$) [23]. Dla InGaN tworzącego studnie kwantowe przyjmowane są różne wartości wzmocnienia g_{QW} i absorpcji α_{QW} , zależnie od położenia wzdłuż osi x (patrz: rys. 1)

Materiał	Współczynnik załamania	Współczynnik absorpcji [cm^{-1}]
Au	1,4763	$5,2998 \times 10^4$
SiO ₂	1,4672	$2,0457 \times 10^{-2}$
GaN:Mg	2,4689	5
Al _{0,045} GaN:Mg	2,4512	5
Al _{0→0,045} GaN:Mg	2,4709 → 2,4512	2 → 5
GaN:Mg/Al _{0,12} GaN:Mg	40,0	40
In _{0,043} GaN	2,5277	0
In _{0,12} GaN	2,7491	g_{QW} lub α_{QW}
In _{0,06} GaN	2,5518	g_{QW} lub α_{QW}
GaN	2,4766	0
In _{0,043} GaN:Si	2,5180	2
GaN:Si	2,4669	5
Al _{0,068→0} GaN:Si	2,4412 → 2,4669	5
Al _{0,068} GaN:Si	2,4412	5
Al _{0,023} GaN:Si	2,4578	5
GaN:Si	2,4669	5

Źródło: opracowanie własne.

składa się także 30 μm , które wynika z łącznej szerokości obszarów położonych obok falowodów grzbietowych. Do obszarów tych wnikają częściowo mody promieniowania wyznaczone przez model optyczny i ich pominięcie przełożyłoby się na przyjęcie warunków brzegowych (w postaci tzw. idealnie dopasowanych warstw o dużej absorpcji promieniowania [22]) w nieodpowiednim miejscu, co skutkowałoby uzyskaniem błędnych rozwiązań. Wstępne obliczenia pokazały, że 150 fal płaskich to minimalna ich liczba powyżej której obserwuje się jedynie znikome zmiany w wartości części urojonej efektywnych współczynników załamania światła powiązanych z modami promieniowania wyznaczonymi dla struktury wybranej do wstępnych obliczeń.

Wyznaczone dla temperatury pokojowej (300 K) parametry materiałowe (współczynnik absorpcji promieniowania i rzeczywista część współczynnika załamania zwana w dalszej części niniejszej pracy współczynnikiem załamania) stosowane w obliczeniach zamieszczone zostały w tabeli 2.

W celu wyznaczenia współczynników załamania w materiałach azotkowych przyjęto, że punktem wyjścia będą następujące zależności, które umożliwiają wyznaczenie tej wielkości dla materiału GaN w 298 K [24] dla energii fotonu E (w eV) z różnych zakresów (poniżej podano również odpowiadające im zakresy dla długości fali λ) [25, 26]:

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,013914 E^4 - 0,096422 E^3 + 0,27318 E^2 - 0,27725 E + 2,3535, \quad (1)$$

$$1,000 \text{ eV} < E < 2,138 \text{ eV} \quad (580 \text{ nm} < \lambda < 1240 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,1152 E^3 - 0,7955 E^2 + 1,959 E + 0,68, \quad (2)$$

$$2,138 \text{ eV} < E < 3,163 \text{ eV} \quad (392 \text{ nm} < \lambda < 580 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 18,2292 E^3 - 174,6974 E^2 + 558,535 E - 593,164, \quad (3)$$

$$3,163 \text{ eV} < E < 3,351 \text{ eV} \quad (370 \text{ nm} < \lambda < 392 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 33,63905 E^3 - 353,1446 E^2 + 1235,0168 E - 1436,09, \quad (4)$$

$$3,351 \text{ eV} < E < 3,532 \text{ eV} \quad (351 \text{ nm} < \lambda < 370 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = -0,72116 E^3 + 8,8092 E^2 - 35,8878 E + 51,335, \quad (5)$$

$$3,532 \text{ eV} < E < 4,100 \text{ eV} \quad (302 \text{ nm} < \lambda < 351 \text{ nm}),$$

$$n_{\text{R,GaN}}(E) = 0,351664 E^4 - 6,06337 E^3 + 39,2317 E^2 - 112,865 E + 124,358, \quad (6)$$

$$4,100 \text{ eV} < E < 4,500 \text{ eV} \quad (276 \text{ nm} < \lambda < 302 \text{ nm}).$$

W celu wykorzystania zależności (1)–(6) do obliczenia współczynnika załamania dla Al_xGaN oraz In_yGaN należy zmodyfikować wartość energii tak, aby uwzględnić różnicę pomiędzy przerwą energetyczną GaN oraz materiału potrójnego [27]. Dodatkowo można też uwzględnić zmiany współczynnika załamania wraz z temperaturą, a także te wynikające z różnych koncentracji nośników. Zależności na współczynniki załamania w materiałach azotkowych GaN, AlGaN i InGaN można wtedy zapisać w następujący sposób:

$$n_{\text{R,GaN}}(E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(E, T, N)), \quad (7)$$

$$n_{\text{R,AlGa}}(x, E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(x, E, T, N)), \quad (8)$$

$$n_{\text{R,InGa}}(y, E, T, N) = n_{\text{R,GaN}}(E + \Delta E(y, E, T, N)), \quad (9)$$

gdzie:

$$\Delta E(E, T, N) = E + \Delta E_1(T) + \Delta E_2(N), \quad (10)$$

$$\Delta E(x, E, T, N) = E + \Delta E_1(x, T) + \Delta E_2(N), \quad (11)$$

$$\Delta E(y, E, T, N) = E + \Delta E_1(y, T) + \Delta E_2(N), \quad (12)$$

$$\Delta E_1(T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,GaN}}(T), \quad (13)$$

$$\Delta E_1(x, T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,AlGa}}(x, T), \quad (14)$$

$$\Delta E_1(y, T) = E_{\text{g,GaN}}(298 \text{ K}) - E_{\text{g,InGa}}(y, T), \quad (15)$$

$$\Delta E_2(N) = -aN^{1/3}. \quad (16)$$

Wartość współczynnika a we wzorze (16) przyjęta w niniejszej pracy wynosi $2,4 \times 10^{-8} \text{ eV cm}$ dla materiałów typu n [28] oraz $1,9 \times 10^{-8} \text{ eV cm}$ dla materiałów typu p [23], a w celu obliczenia ΔE_2 należy podstawić za N koncentrację domieszki.

Wartości przerw energetycznych dla materiałów azotkowych dwuskładnikowych w danej temperaturze można obliczyć korzystając ze wzoru Varshniego [29]:

$$E_{\text{g}}(T) = E_{\text{g},0} - \frac{\alpha T^2}{T + \beta}, \quad (17)$$

gdzie $E_{\text{g},0}$ to przerwa energetyczna dla $T = 0 \text{ K}$, a α oraz β to parametry dopasowania. W przypadku materiałów trójskładnikowych wartości przerwy energetycznej wyznacza się za pomocą wzorów interpolacyjnych, które uwzględniają nieliniowe zmiany tej wielkości w zależności od składu materiałowego [30]:

$$E_{\text{g,AlGa}}(x, T) = xE_{\text{g,AlN}} + (1 - x)E_{\text{g,GaN}} - x(1 - x)C_{\text{AlGa}}, \quad (18)$$

$$E_{\text{g,InGa}}(y, T) = yE_{\text{g,InN}} + (1 - y)E_{\text{g,GaN}} - y(1 - y)C_{\text{InGa}}. \quad (19)$$

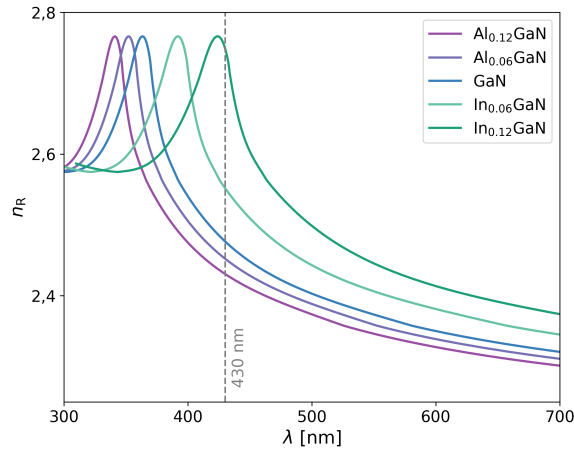
Wartości wszystkich parametrów niezbędnych do obliczenia przerwy energetycznej w materiałach GaN, AlGa i InGa o dowolnym składzie materiałowym zostały przedstawione w tabeli 3.

W celu zilustrowania ogólnego przebiegu zmian współczynnika załamania dla materiałów o składach mieszczących się w przedziale zastosowanym w strukturze wyjściowej, na rysunku 3 przedstawiono zależność współczynnika załamania w temperaturze 300 K od długości fali dla GaN, AlGa oraz InGa. Dokładne wartości współczynnika załamania użyte w dalszych obliczeniach, dla których przyjęto $\lambda = 430 \text{ nm}$, przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 3. Wartości parametrów niezbędnych do obliczenia przerwy energetycznej w materiałach GaN, AlGaIn i InGaIn dla zadanej temperatury

Parametr	AlN	GaN	InN	AlGaIn	InGaIn
$E_{g,0}$ [eV]	6,100	3,510	0,690	—	—
α [meV K ⁻¹]	2,63	0,914	0,414	—	—
β [K]	2082	825	154	—	—
C [eV]	—	—	—	0,8	1,4

Źródło: opracowanie własne na podstawie [31].



Rysunek 3. Obliczone (dla 300 K) wartości współczynnika załamania n_R w zależności od długości fali λ dla niedomieszkowanych materiałów GaN, AlGaIn (Al: 6 %, 12 %) i InGaIn (In: 6 %, 12 %)

Źródło: opracowanie własne.

Wzory oraz wartości parametrów umożliwiające obliczenie współczynnika załamania dla amorficznego SiO₂ i złota można znaleźć w [32] oraz [33]. Dla powietrza przyjęto wartość współczynnika załamania równą 1 [34].

Do obliczeń współczynnika absorpcji promieniowania w materiałach azotkowych zastosowano prostą zależność liniową, w której wielkość ta jest proporcjonalna do koncentracji domieszki N :

$$\alpha(N) = AN, \quad (20)$$

i przyjęto, że wartość współczynnika proporcjonalności A wynosi 10^{-18} cm².

Według danych z [35], w warstwach typu p, które są silnie domieszkowane, absorpcja jest wyraźnie większa niż w warstwach typu n stosowanych w azotkowych laserach półprzewodnikowych. Wynika to z faktu, że energia aktywacji nośników w warstwach

typu n jest o rząd mniejsza niż w warstwach typu p [36,37], a tym samym do uzyskania odpowiedniej przewodności elektrycznej nie jest konieczne stosowanie wysokiej koncentracji domieszek.

Niewielkie wartości absorpcji obserwuje się również w warstwach niedomieszkowanych [38, 39]. Należy przy tym podkreślić, że w przypadku GaN w literaturze występują znaczne rozbieżności dla wartości współczynnika absorpcji nawet dla tych samych koncentracji i typu domieszki, jak również długości fali, co pokazują wyniki podane w [40, 41]. W związku z tym zasadne wydaje się stosowanie uproszczonego podejścia opartego na zależności (20), przy czym bardziej szczegółowa analiza numeryczna może obejmować obliczenia dla różnych wartości współczynnika A . Warto dodać, że identyczną postać zależności (20) podano w [42], gdzie badania dotyczą lasera emitującego światło zielone (520 nm), a przyjęta wartość współczynnika A wynosi $2,5 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$.

Współczynnik absorpcji α dla amorficznego SiO_2 obliczany jest na podstawie współczynnika ekstynkcji k dla tego materiału ($\alpha = 4\pi k/\lambda$), który dla długości fali λ z przedziału 400–460 nm wynosi 0,007 według danych zawartych w [43]. Wzory oraz wartości parametrów umożliwiające obliczenie współczynnika absorpcji dla złota można znaleźć w [33]. Dla powietrza przyjęto wartość współczynnika absorpcji równą 0.

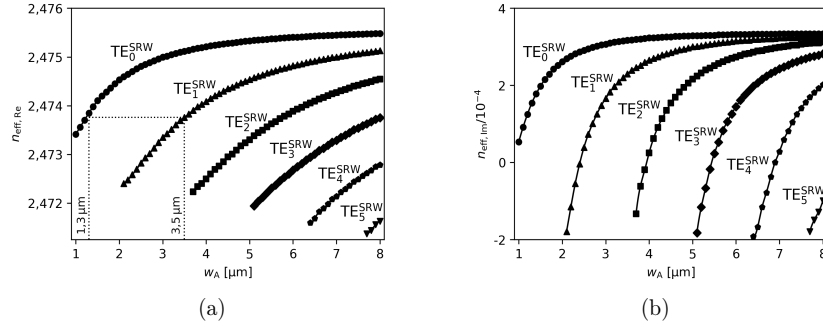
4. WYNIKI SYMULACJI

Wyniki symulacji przedstawione w tej części uzyskano dla struktur laserowych zaprojektowanych do emisji promieniowania o długości fali $\lambda = 430 \text{ nm}$, opartych na strukturze opisanej w [14]. Materiały warstw oraz ich grubości w modelowanych strukturach zestawiono w tabeli 1. Przykładowe wartości parametrów optycznych, obliczone dla $T = 300 \text{ K}$, znajdują się w tabeli 2. Szerokości falowodów grzbietowych, a także wartości wzmocnienia g_{QW} i absorpcji α_{QW} przyjęte w warstwie czynnej podano w podpisach pod rysunkami. Układ współrzędnych użyty do przedstawienia rozkładów modów promieniowania pokazano na rysunku 1.

Przy badaniu wpływu parametrów, takich jak szerokości falowodów A (w_A) i B (w_B) oraz wartości wzmocnienia g_{QW} i absorpcji α_{QW} , parametry te były modyfikowane z wykorzystaniem określonego kroku: $0,1 \mu\text{m}$ dla w_A i w_B , $5 \times 10^2 \text{ cm}^{-1}$ dla g_{QW} oraz $1 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$ dla α_{QW} . Na wykresach poszczególne punkty przedstawiają wyniki obliczeń, natomiast linie pokazują przewidywane wartości dla parametrów z badanego zakresu.

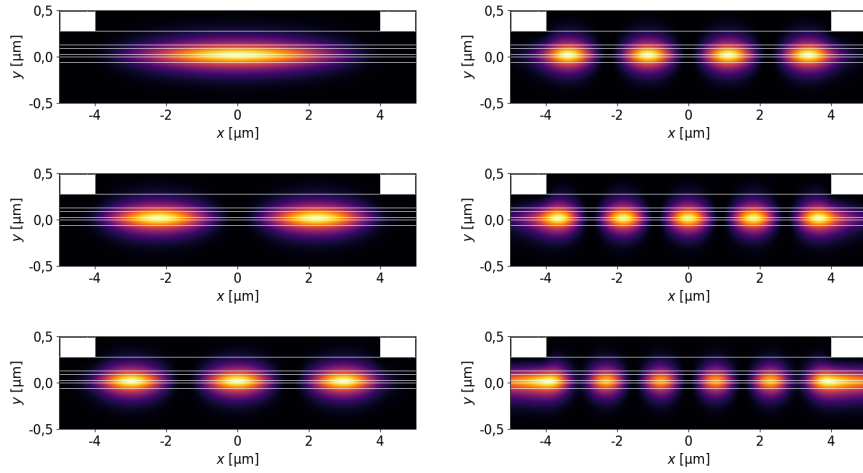
4.1. Laser z pojedynczym falowodem grzbietowym

Kluczowym parametrem decydującym o liczbie modów poprzecznych w strukturze SRW jest szerokość falowodu grzbietowego. Rzeczywista i urojona część efektywnego współczynnika załamania n_{eff} , w zależności od szerokości falowodu, pokazane są na rysunku 4a i rysunku 4b. Dodatkowo, na rysunku 5 ukazane są przestrzenne rozkłady modów promieniowania dla struktury o szerokości grzbietu $8,0 \mu\text{m}$, która jest maksymalną szerokością falowodu, dla której wykonano obliczenia.



Rysunek 4. Rzeczywista (a) oraz urojona (b) część efektywnego współczynnika załamania w zależności od szerokości falowodu grzbietowego w strukturze SRW, obliczone dla $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 5. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości $w_A = 8,0 \text{ }\mu\text{m}$, obliczone dla $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

Część urojona efektywnego współczynnika załamania, $n_{\text{eff}, \text{Im}}$, jest proporcjonalna do wzmocnienia modowego g_m zgodnie ze wzorem:

$$g_m = \frac{4\pi}{\lambda} n_{\text{eff}, \text{Im}}. \quad (21)$$

Jeżeli jej wartość jest dodatnia, oznacza to, że dla danego modu wszystkie możliwe straty optyczne są równoważone przez wzmocnienie materiałowe uzyskiwane

w obszarze czynnym. Tym samym spełniony jest warunek osiągnięcia progu akcji laserowej.

W przypadku, gdy dla danej szerokości falowodu może istnieć wiele modów poprzecznych, wartość wzmocnienia materiałowego decyduje o tym, ile z nich osiągnie próg. W rzeczywistości wzmocnienie materiałowe zależy od koncentracji nośników wynikającej z gęstości prądu elektrycznego, a emitowanie promieniowania laserowego jest procesem silnie nieliniowym, w którym dominującą rolę odgrywają przestrzenne i spektralne wypalanie nośników, co wpływa na liczbę modów w widmie światła laserowego.

Niemniej jednak różnice pomiędzy częściami urojonymi efektywnych współczynników załamania wyznaczonych dla poszczególnych modów można traktować jako wskaźnik różnic w prądzie wymaganym do osiągnięcia progu akcji laserowej dla tych modów. Z tego powodu zwiększanie różnicy pomiędzy częścią urojoną efektywnego współczynnika załamania dla modu podstawowego ($n_{\text{eff,Im},0}$) a największą wartością tej wielkości spośród tych dla kolejnych modów ($n_{\text{eff,Im},i}$) sprzyja pracy jednomodowej. (W przyjętej tutaj notacji indeks i jest dodatni dla modów wyższego rzędu oraz wynosi 0 dla modu podstawowego.)

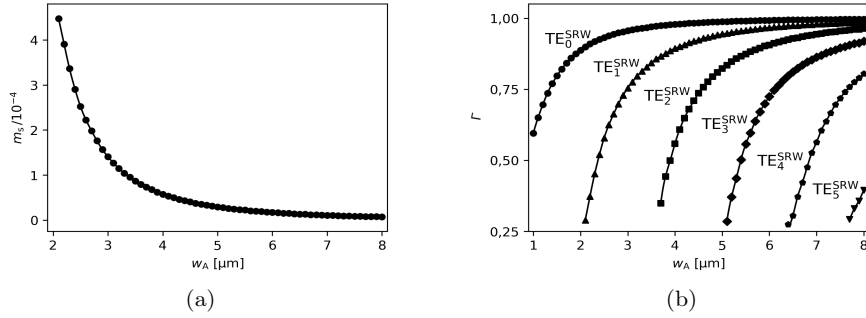
Wyniki przedstawione na rysunku 4 ukazują typową zależność [10,44], jaką można otrzymać dla lasera krawędziowego z falowodem grzbietowym: wraz ze wzrostem szerokości falowodu rośnie liczba modów poprzecznych w strukturze, a jednocześnie zmniejszają się straty optyczne pomiędzy poszczególnymi modami. Z rysunku 4 wynika, że praca wyłącznie na jednym modzie możliwa jest dla $w_A < 2,1 \mu\text{m}$, co odpowiada progu odcięcia modu TE_1^{SRW} . Dla założonego wzmocnienia w obszarze czynnym, które wynosi 3000 cm^{-1} , mod TE_1^{SRW} może zostać zaobserwowany w widmie promieniowania już dla $w_A = 2,4 \mu\text{m}$. W przedziale $2,1 \mu\text{m} < w_A < 3,4 \mu\text{m}$ mod TE_1^{SRW} może pojawić się w widmie dopiero przy wyższych wartościach wzmocnienia w obszarze czynnym.

Aby opisać zdolność tłumienia modów wyższego rzędu, wprowadzona zostanie wielkość nazwana separacją modów (m_s), zdefiniowana jako różnica pomiędzy częścią urojoną efektywnego współczynnika załamania modu podstawowego i częścią urojoną modu o kolejnej najwyższej wartości dla tej wielkości:

$$m_s = n_{\text{eff,Im},0} - n_{\text{eff,Im},i}. \quad (22)$$

Separacja modów pełni istotną rolę w analizie wyników dla struktury DRW, a jej wartości dla struktury SRW będą traktowane jako punkt odniesienia. Z tego względu pokazano je dla różnych szerokości falowodu grzbietowego na rysunku 6a.

Podstawowym czynnikiem decydującym o wartości różnic dla części urojonych efektywnego współczynnika załamania dla różnych modów jest to, jaka część pola optycznego przypada na silnie absorbujące obszary znajdujące się w warstwie czynnej poza aperturą dla grzbietu A, gdzie zachodzi absorpcja międzypasmowa. Dlatego w analizie tłumienia modów użyteczne jest wprowadzenie parametru opisującego, jaka część całkowitego pola optycznego w warstwie czynnej przypada na obszar apertury A. Parametr ten, nazywany dalej współczynnikiem ograniczenia modu Γ ,



Rysunek 6. Separacja modów (a) oraz współczynnik ograniczenia modu (b) w zależności od szerokości falowodu grzbietowego w strukturze SRW, obliczone dla $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

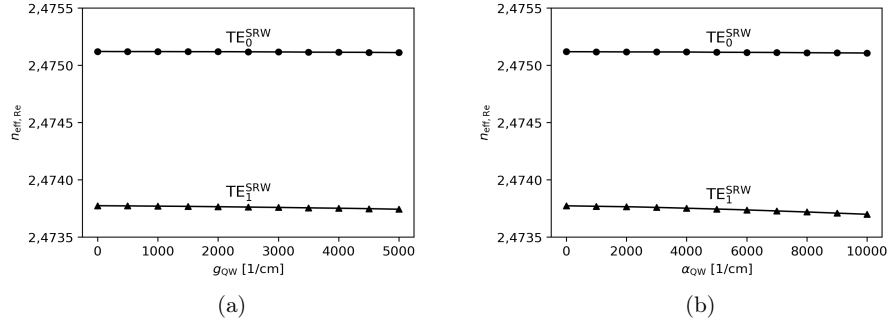
można wyrazić poprzez stosunek natężenia światła w części warstwy czynnej, która przypada na obszar apertury A, do całkowitego natężenia światła w tym obszarze warstwy czynnej, który został uwzględniony w obliczeniach:

$$\Gamma = \frac{\int_{x_{A1}}^{x_{A2}} I(x) dx}{\int_{x_{s1}}^{x_{s2}} I(x) dx}, \quad (23)$$

przy czym x_{A1} i x_{A2} wyznaczają odpowiednio lewą i prawą krawędź falowodu A (przy czym $x_{A2} - x_{A1} = w_A$), a x_{s1} i x_{s2} oznaczają lewe i prawe granice całego obszaru obliczeniowego. Funkcja $I(x)$ opisuje natężenie światła wzdłuż osi x dla wartości y odpowiadającej położeniu środka warstwy czynnej. Obliczone wartości współczynnika ograniczenia dla struktur SRW o różnych szerokościach falowodu grzbietowego przedstawiono na rysunku 6b.

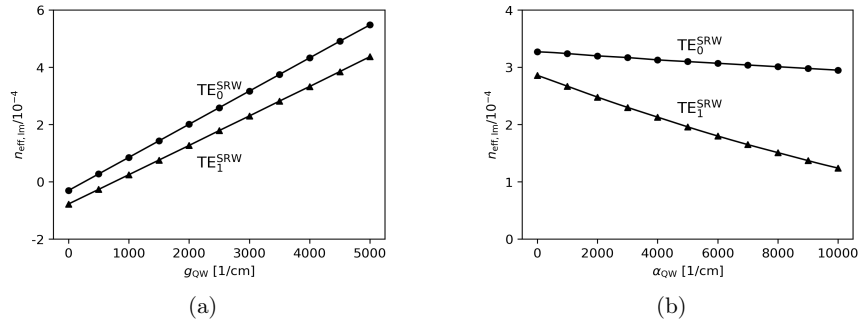
Projektując strukturę DRW w oparciu o podejście supersymetryczne, należy na początku ustalić szerokości falowodu A i obliczyć dla niej efektywne współczynniki załamania wszystkich modów. Następny krok polega na wyznaczeniu szerokości falowodu B, którego obecność pozwoli na znalezienie modu będącego odpowiednikiem modu wyższego rzędu z falowodu A. W przypadku dążenia do uzyskania jak najwyższej mocy emitowanego promieniowania przez strukturę DRW, należy poszukiwać największej szerokości falowodu A. Z uwagi na to, że celem niniejszej pracy jest jedynie przybliżenie tematu podejścia supersymetrycznego, obliczenia dla struktury DRW zostaną przedstawione dla przykładowej szerokości $w_A = 3,5 \text{ μm}$. Dla tej szerokości falowodu A, w oparciu o rysunek 4a, wybrana została szerokość falowodu $w_B = 1,3 \text{ μm}$, która będzie uwzględniona w większości obliczeń dla struktury DRW, opisanych w części 4.2 (Laser z podwójnym falowodem grzbietowym).

Przedmiotem analizy będzie również wpływ wartości wzmocnienia g_{QW} i absorpcji α_{QW} w warstwie czynnej na możliwość sprzężenia modów. Wartości tych parametrów są powiązane z wartością części urojonej współczynnika załamania, przez co ich zmiany mogą wpływać na wartości efektywnych współczynników załamania poszczególnych modów.



Rysunek 7. Rzeczywista część efektywnego współczynnika załamania w zależności od wzmocnienia (a) oraz absorpcji (b) przyjętych w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości 3,5 μm , obliczone dla $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 8. Urojona część efektywnego współczynnika załamania w zależności od wzmocnienia (a) oraz absorpcji (b) przyjętych w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze SRW z falowodem grzbietowym o szerokości 3,5 μm , obliczone dla $\alpha_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ (a) oraz $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ (b)

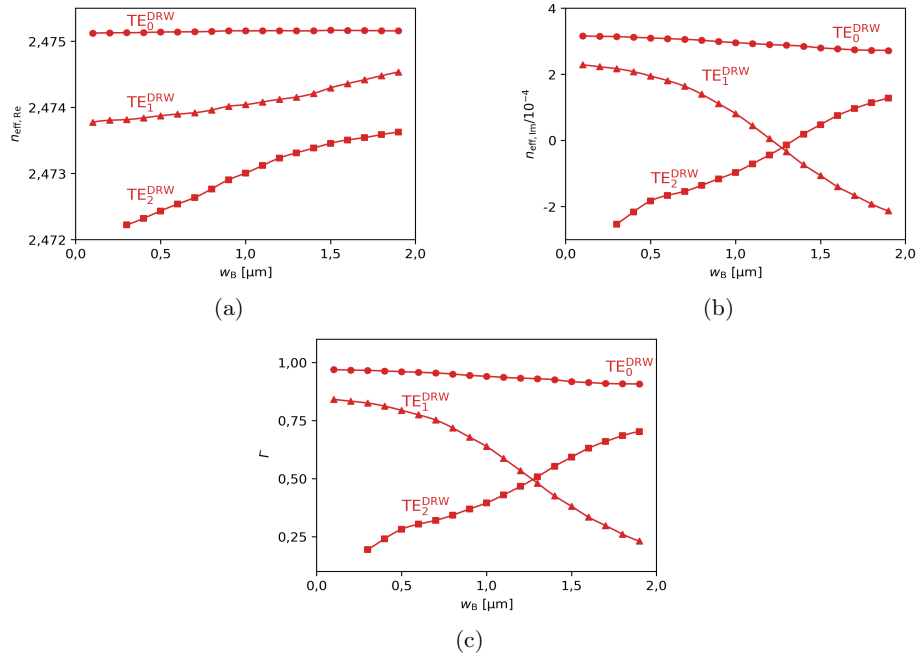
Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 7a i rysunku 7b pokazany został wpływ zmian przyjętych wartości wzmocnienia i absorpcji na część rzeczywistą efektywnego współczynnika załamania. Jak można zauważyć, wpływ ten jest znikomy, nawet pomimo tego, że różnice pomię-

dzy maksymalną a minimalną wartością wzmocnienia i absorpcji wynoszą odpowiednio 5000 cm^{-1} i 10000 cm^{-1} . Zmiany przyjętych wartości wzmocnienia i absorpcji wpływają jednak wyraźnie na część urojoną współczynnika załamania (rysunek 8a i rysunek 8b). Z tego powodu, przy projektowaniu struktury DRW w oparciu o podejście supersymetryczne, można przyjąć, że zmiany części urojonej współczynnika załamania nie wpływają znacząco na wybór optymalnych szerokości falowodów.

4.2. Laser z podwójnym falowodem grzbietowym

W tej części przedstawione zostaną wyniki dla struktury DRW, dla których zbadany zostanie wpływ szerokości falowodu B, a także parametrów warstwy czynnej, na wielkości takie jak efektywne współczynniki załamania, separacje modów czy współczynniki ograniczenia. Strukturą wyjściową będzie struktura z falowodem A o szerokości $w_A = 3,5 \mu\text{m}$ i falowodem B o szerokości $w_B = 1,3 \mu\text{m}$, ale rozważane będą struktury, gdzie szerokość falowodu B mieści się w przedziale od $0,1 \mu\text{m}$ do $2 \mu\text{m}$. Wszystkie obliczenia wykonano dla odległości między falowodami wynoszącej $d_{AB} = 0,1 \mu\text{m}$.



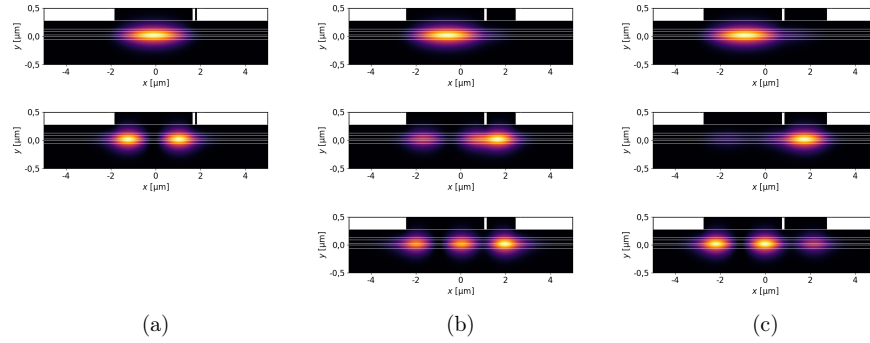
Rysunek 9. Rzeczywista (a) i urojona (b) część efektywnego współczynnika załamania oraz współczynnik ograniczenia modu (c) w zależności od szerokości falowodu grzbietowego B w strukturze DRW z falowodem grzbietowym A o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ obliczone dla

$$g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1} \text{ i } \alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$$

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 9a i rysunku 9b przedstawiono wpływ zmiany szerokości falowodu B na części rzeczywistą i urojoną efektywnego współczynnika załamania, natomiast na rysunku 9c pokazany został wpływ szerokości falowodu B na współczynnik ograniczenia Γ . Wartość tego współczynnika pozwala na jednoznaczne wskazanie, gdzie są zlokalizowane mody. W przypadku, gdy w_B dąży do zera, wyniki dla struktury DRW z rysunku 9 stają się zbliżone do wyników dla struktury SRW o szerokości $w_A = 3,5 \mu\text{m}$, przedstawionych na rysunku 4 i rysunku 6. Dla $w_B = 0 \mu\text{m}$ struktura DRW sprowadza się do struktury SRW, a na aperturę o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ przypadają jedynie dwa mody (rysunek 10a). Separacja pomiędzy tymi modami jest stosunkowo niewielka (patrz: rysunek 4b), co może prowadzić do wzbudzenia modu wyższego rzędu.

Na drugim krańcu rozważanego przedziału dla w_B szerokość falowodu B wynosi prawie $2 \mu\text{m}$. W takim przypadku rozkłady modów promieniowania są prawie całkowicie ograniczone do falowodu A lub falowodu B, a sprzężenie pomiędzy tymi modami jest niewielkie (rysunek 10c). Obecność dwóch modów ograniczonych do falowodu A przekłada się na niewielką separację pomiędzy nimi (rysunek 4b), przez co możliwe jest wzbudzenie w takiej strukturze modu wyższego rzędu.



Rysunek 10. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze DRW z falowodem grzbietowym A o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ i falowodem grzbietowym B o szerokości $0,1 \mu\text{m}$ (a), $1,3 \mu\text{m}$ (b) i $1,9 \mu\text{m}$ (c) obliczone dla $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ i $\alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

Aby rozwiązać problem ewentualnego wzbudzenia modów wyższego rzędu w strukturze DRW, gdzie niewielką separację modów obserwuje się zarówno dla bardzo małych, jak i dużych wartości w_B , zbadany został przypadek, w którym falowód B ma szerokość $w_B = 1,3 \mu\text{m}$. Jak wynika z rysunku 9b, szerokość ta powinna być bliska wartości optymalnej dla uzyskania efektu supersymetrii. W rozważanej strukturze DRW części rzeczywiste efektywnych współczynników załamania $n_{\text{eff,Re}}$ dla modów TE_1^{DRW} i TE_2^{DRW} zbliżają się do siebie (rysunek 9a), gdy w_B dąży do $1,4 \mu\text{m}$, a minimalna różnica pomiędzy nimi wynosi wtedy $8,3 \times 10^{-4}$. Z kolei części urojone współczynników $n_{\text{eff,Im}}$ (rysunek 9b) oraz współczynniki ograniczenia modów Γ (rysunek 9c) przecinają się dla $w_B = 1,3 \mu\text{m}$. Dla tej szerokości falowodu B sprzężone

mody mają podobne rozkłady pola promieniowania (rysunek 10b) i przestają być ograniczone do jednego falowodu. Dla $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ efektywne współczynniki załamania modów TE_1^{DRW} i TE_2^{DRW} mają niemal równe części urojone (różnica to $2,0 \times 10^{-5}$), a różnica pomiędzy ich częściami rzeczywistymi jest prawie najmniejsza. Straty optyczne, wynikające z ujemnej części urojonej efektywnego współczynnika załamania ($n_{\text{eff,Im},1}$ i $n_{\text{eff,Im},2}$), osiągają maksimum dla obu tych modów, podczas gdy część urojona efektywnego współczynnika załamania dla modu podstawowego $n_{\text{eff,Im},0}$ jest dodatnia (rysunek 9b), co wskazuje na możliwość uzyskania akcji laserowej. Co więcej, mod TE_0^{DRW} , zlokalizowany w falowodzie A, nie ulega istotnym zmianom przy modyfikacji grubości falowodu B w badanym zakresie. Maksymalna względna zmiana współczynnika ograniczenia dla tego modu, przyjmując wartość obliczoną dla $w_B = 1,3 \mu\text{m}$ jako punkt odniesienia, wynosi jedynie 0,82 %. Umożliwia to stabilną pracę z jednym modem poprzecznym oraz uzyskanie wyższej mocy emitowanego promieniowania dzięki zastosowaniu szerszego falowodu i wykorzystaniu supersymetrii.

W części 4.1 (Laser z pojedynczym falowodem grzbietowym) do opisu tłumienia modów wyższego rzędu wprowadzona została wielkość zwana separacją modów. Poniżej znajduje się definicja innej wielkości, która może pełnić podobną rolę. Wielkość ta będzie nazywana względną separacją modów (m_{sr}) i jest zdefiniowana następującym wzorem:

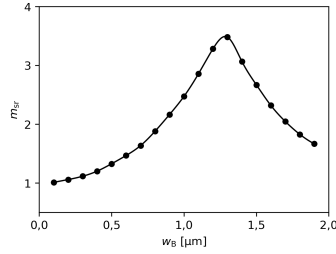
$$m_{\text{sr}} = m_{\text{s}} - m_{\text{s},w_A}, \quad (24)$$

gdzie m_{s,w_A} oznacza separację modów obliczoną dla struktury SRW o szerokości grzbietu w_A . W odróżnieniu od separacji modów, względna separacja modów bezpośrednio informuje o stopniu poprawy w tłumieniu modów wyższego rzędu, wykorzystując jako punkt odniesienia wynik dla struktury SRW.

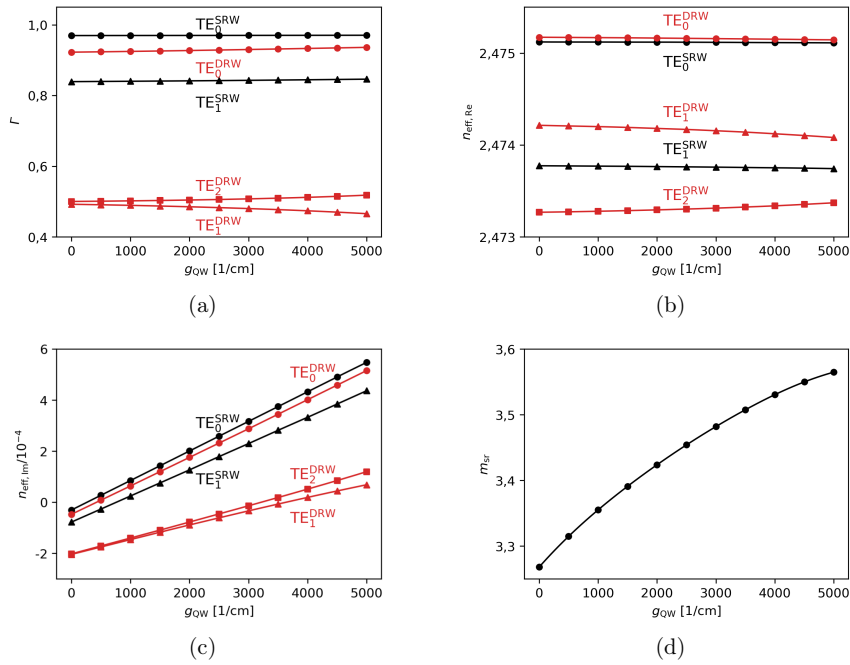
Zależność względnej separacji modów dla struktur DRW z szerokością falowodu A równą $w_A = 3,5 \mu\text{m}$ od szerokości falowodu B przedstawiono na rysunku 11. Największą wartość, $m_{\text{sr}} = 3,5$, uzyskano dla $w_B = 1,3 \mu\text{m}$. Rysunek 11 pokazuje również, że $m_{\text{sr}} > 1$ dla wszystkich rozważanych tu wartości w_B , co oznacza, że tłumienie modów wyższego rzędu w konfiguracji DRW jest silniejsze niż w strukturze SRW o tej samej szerokości falowodu A. Możliwa jest dalsza optymalizacja struktury DRW pod kątem uzyskania jeszcze wyższych wartości m_{sr} , jednak symulacja polegająca na jednoczesnej modyfikacji szerokości obu falowodów wymaga znacznie większej liczby obliczeń i nie została przeprowadzona w ramach niniejszej pracy.

Wpływ wartości parametrów warstwy czynnej (wzmocnienie i absorpcja), podobnie jak dla struktury SRW, został również zbadany w przypadku struktury DRW. Do obliczeń opisanych w tej części pracy wybrana została struktura z $w_A = 3,5 \mu\text{m}$ i $w_B = 1,3 \mu\text{m}$.

Na rysunku 12a pokazano, że dla wzmocnienia z zakresu od 0 cm^{-1} do 5000 cm^{-1} współczynnik ograniczenia modu TE_0^{DRW} wynosi ponad 90 %, podczas gdy dla modów TE_1^{DRW} i TE_2^{DRW} (oznaczenia modów wynikają z rysunku 12b) wynosi on około 50 %. Skutkuje to wyraźnie mniejszymi wartościami części urojonych efektywnego

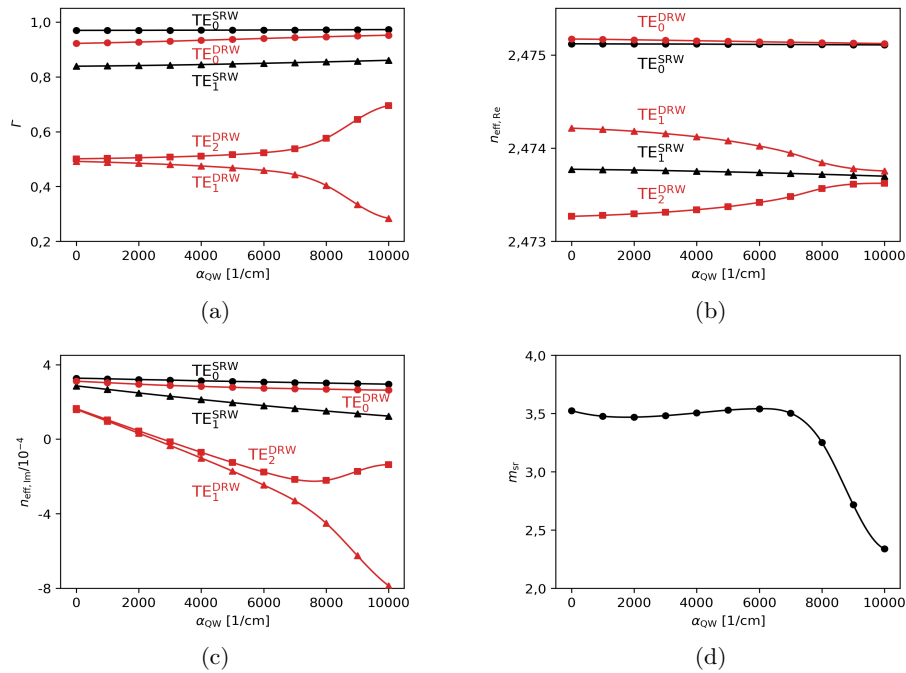


Rysunek 11. Względna separacja modów w zależności od szerokości faliowodu grzbietowego B w strukturze DRW z faliowodem grzbietowym A o szerokości $3,5 \mu\text{m}$, obliczona dla $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$
Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 12. Współczynnik ograniczenia modu (a), rzeczywista (b) i urojona (c) część efektywnego współczynnika załamania oraz względna separacja modów (d) w zależności od wzmacnienia przyjętego w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze DRW z faliowodem grzbietowym A o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ i faliowodem grzbietowym B o szerokości $1,3 \mu\text{m}$, obliczone dla $\alpha_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$
Źródło: opracowanie własne.

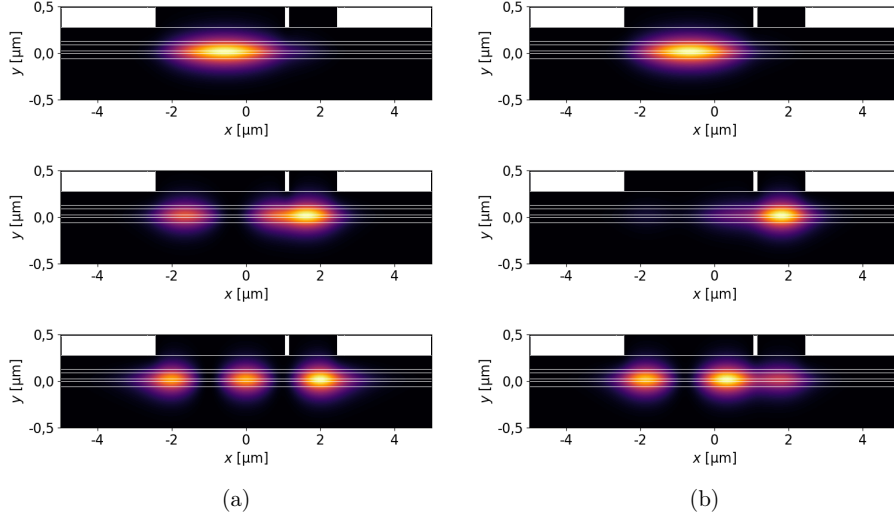
współczynnika załamania dla obu tych modów (rysunek 12c). Wraz ze wzrostem wzmocnienia obserwowane są jedynie niewielkie zmiany współczynnika ograniczenia dla modów TE_1^{DRW} i TE_2^{DRW} , co oznacza, że ich przestrzenne rozkłady pozostają zbliżone, a dyskryminacja modów nie ulega wyraźnemu osłabieniu. Separacja modów dla struktury DRW jest wyraźnie większa niż w przypadku struktury SRW o tej samej szerokości faliowodu A (rysunek 12c). Obliczenia wskazują również, że względna separacja modów (rysunek 12d) rośnie wraz ze wzmocnieniem i dla $g_{QW} = 5000 \text{ cm}^{-1}$ osiąga wartość 3,56.



Rysunek 13. Współczynnik ograniczenia modu (a), rzeczywista (b) i urojona (c) część efektywnego współczynnika załamania oraz względna separacja modów (d) w zależności od absorpcji przyjętej w warstwach ze studniami kwantowymi w strukturze DRW z faliowodem grzbietowym A o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ i faliowodem grzbietowym B o szerokości $1,3 \mu\text{m}$, obliczone dla $g_{QW} = 3000 \text{ cm}^{-1}$

Źródło: opracowanie własne.

Wpływ drugiego z parametrów opisujących warstwę czynną, absorpcji, na wartość współczynnika ograniczenia modu ukazany jest na rysunku 13a. Dla całego przedziału wartości absorpcji wybranego do obliczeń współczynnik ograniczenia wynosi ponad 90 % dla modu TE_0^{DRW} , podczas gdy dla modów TE_1^{DRW} i TE_2^{DRW} (oznaczenia modów wynikają z rysunku 13b) wynosi około 50 % dla absorpcji od 0 cm^{-1} do około 5000 cm^{-1} , po czym następują wyraźne zmiany w przestrzennych rozkładach modów



Rysunek 14. Przestrzenne rozkłady modów promieniowania w strukturze DRW z falowodem grzbietowym o szerokości $3,5 \mu\text{m}$ i falowodem grzbietowym B o szerokości $1,3 \mu\text{m}$, obliczone dla $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ oraz $\alpha_{\text{QW}} = 0 \text{ cm}^{-1}$ (a) oraz $g_{\text{QW}} = 3000 \text{ cm}^{-1}$ i $\alpha_{\text{QW}} = 10000 \text{ cm}^{-1}$ (b)
Źródło: opracowanie własne.

wyższego rzędu (rysunek 13a) i dochodzi do sytuacji, gdy zamiast rozkładów promieniowania ukazujących sprzężone mody wyższego rzędu (rysunek 14a) obserwuje się takie ich rozkłady, gdzie mody te są prawie całkowicie ograniczone do falowodu A lub falowodu B (rysunek 14b).

Stosując pojęcie znane z literatury poświęconej supersymetrii, można użyć tu pojęcia „złamanie symetrii”. Różnica pomiędzy częściami urojonymi efektywnego współczynnika załamania dla struktury DRW jest większa niż w przypadku struktury SRW o tej samej szerokości falowodu A (rysunek 13c) dla wszystkich rozważanych wartości absorpcji, przy czym dla absorpcji powyżej 8000 cm^{-1} separacja modów zaczyna wyraźnie się zmniejszać, co przekłada się na spadek wartości względnej separacji modów (rysunek 13d) z wartości 3,5 (dla α_{QW} od 0 cm^{-1} do 7000 cm^{-1}) do 2,3 (dla $\alpha_{\text{QW}} = 10000 \text{ cm}^{-1}$).

5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki symulacji komputerowej azotkowych laserów o emisji krawędziowej, w których zastosowano podejście supersymetryczne. Polega ono na rozszerzeniu typowej struktury z pojedynczym falowodem grzbietowym A o dodatkowy falowód B, pełniący rolę supersymetrycznego partnera falowodu A. Dla takiej konfiguracji przeanalizowano wpływ szerokości falowodu B na tłumienie

modów wyższego rzędu. Dodatkowo zbadano wpływ wzmocnienia i absorpcji w warstwach studni kwantowych na parametry opisujące sprzężenie pomiędzy modami wyższego rzędu.

Uzyskane wyniki wykazały, że zastosowanie struktury z dwoma falowodami o odpowiednio dobranych szerokościach pozwala na silną dyskryminację modów, co umożliwia stabilną pracę w trybie pojedynczego modu poprzecznego nawet w przypadku szerszych obszarów czynnych. Parametr zwany względną separacją modów, użyty do porównania badanych laserów, osiągnął w strukturze DRW wartość około 3,5, co oznacza separację modów ponad trzykrotnie większą niż w strukturze SRW (strukturze referencyjnej z pojedynczym falowodem grzbietowym) o tej samej szerokości. Wynik ten czyni strukturę DRW obiecującym rozwiązaniem w projektowaniu przyrządów przeznaczonych do pracy przy wysokiej mocy optycznej. Co więcej, przeprowadzone obliczenia stanowią punkt wyjścia do dalszych badań nad efektem supersymetrii w strukturach azotkowych, które mogą objąć m.in. analizę wpływu odległości między falowodami, głębokości trawienia czy niejednorodnego rozkładu temperatury w strukturze laserowej, a także wpływu dodania trzeciego falowodu grzbietowego C po przeciwnej stronie niż falowód B.

LITERATURA

- [1] Mu L., Zhu X., Yang B., Yang L., Xu X., Zhao Y., He D., *Development of a high-power blue diode laser for precision vaporization of prostate tissue for the surgical management of benign prostatic hyperplasia*, "UroPrecision" 2024, vol. 1, no. 3, pp. 105–115.
- [2] Yang J., Zhao D., Liu Z., Huang Y., Wang B., Wang X., Zhang Y., Zhang Z., Liang F., Duan L., Wang H., Shi Y., *GaN based ultraviolet laser diodes*, "Journal of Semiconductors" 2024, vol. 45, no. 1, art. 011501, pp. 1–10.
- [3] Bojarska-Cieślińska A., Marona Ł., Smalc-Koziorowska J., Grzanka S., Weyher J., Schiavon D., Perlin P., *Role of dislocations in nitride laser diodes with different indium content*, "Scientific Reports" 2021, vol. 11, art. 21, pp. 1–8.
- [4] Walker C.L., Bryce A.C., Marsh J.H., *Improved catastrophic optical damage level from laser with nonabsorbing mirrors*, "IEEE Photonics Technology Letters" 2002, vol. 14, no. 10, pp. 1394–1396.
- [5] Redaelli L., Wenzel H., Martens M., Einfeldt S., Kneissl M., Tränkle G., *Index antiquiding in narrow ridge-waveguide (In,Al)GaN-based laser diodes*, "Journal of Applied Physics" 2013, vol. 114, no. 11, art. 113102, pp. 1–9, 2013.
- [6] Huber A.E., Yeoh T.S., Swint R.B., Woo C.Y., Lee K.E., Roh S.D., Coleman J.J., Faircloth B.O., Zediker M.S., *Novel design for high-power single-lateral-mode lasers*, "IEEE Photonics Technology Letters" 2001, vol. 13, no. 10, pp. 1064–1066.

- [7] Sha H., Song Y., Chen Y., Liu J., Shi M., Wu Z., Zhang H., Qin L., Liang L., Jia P., Qiu C., Lei Y., Wang Y., Ning Y., Miao G., Zhang J., Wang L., *Advances in semiconductor lasers based on parity-time symmetry*, "Nanomaterials" 2024, vol. 14, no. 7, art. 571, pp. 1–25.
- [8] Fu T., Wang Y., Zhou X., Du F., Fan J., Wang X., Chen J., Qi A., Zheng W., *Approaches to tuning the exceptional point of PT-symmetric double ridge stripe lasers*, "Optics Express" 2021, vol. 29, no. 13, pp. 20440–20448.
- [9] Miri M.A., Heinrich M., El-Ganainy R., Christodoulides D.N., *Supersymmetric optical structures*, "Physical Review Letters" 2013, vol. 110, no. 23, art. 233902, pp. 1–5.
- [10] Zhao X., Zeng S., Sweatt L., Zhu L., *High-power single-mode triple-ridge waveguide semiconductor laser based on supersymmetry*, "AIP Advances" 2021, vol. 11, no. 9, art. 095216, pp. 1–6, 2021.
- [11] Şeker E., Olyaeefar B., Dadashi K., Şengül S., Teimourpour M.H., El-Ganainy R., Demir A., *Single-mode quasi PT-symmetric laser with high power emission*, "Light: Science & Applications" 2023, vol. 12, art. 149, pp. 1–8.
- [12] Han L., Wang Z., Gordeev N.Y., Maximov M.V., Tang X., Beckman A.A., Kornyshev G.O., Payusov A.S., Shernyakov Y.M., Zhukov A.E., Li K., Zhai R., Jia Z., Yang H., Zhang W., *Progress of edge-emitting diode lasers based on coupled-waveguide concept*, "Micromachines" 2023, vol. 14, no. 6, art. 1271, pp. 1–14.
- [13] Hokmabadi M.P., Nye N.S., El-Ganainy R., Christodoulides D.N., Khajavikhan M., *Supersymmetric laser arrays*, "Science" 2019, vol. 363, no. 6427, pp. 623–626, 2019.
- [14] Dąbrówka D., Sarzała R.P., Wasiak M., Kafar A., Perlin P., Saba K., *Thermal analysis of a two-dimensional array with surface light emission based on nitride EEL lasers*, "Opto-Electronics Review" 2022, vol. 30, no. 4, art. e144115, pp. 1–7.
- [15] Liang F., Zhao D.G., Liu Z.S., Chen P., Yang J., Duan L.H., Shi Y. S., Wang H., *GaN-based blue laser diode with 6.0 W of output power under continuous-wave operation at room temperature*, "Journal of Semiconductors" 2021, vol. 42, no. 11, art. 112801, pp. 1–3.
- [16] Onwukaeme C., Ryu H.Y., *Investigation of the optimum Mg doping concentration in p-type doped layers of InGaN blue laser diode structures*, "Crystals" 2021, vol. 11, no. 11, art. 1335, pp. 1.
- [17] Onwukaeme C., Ryu H.Y., *Optimum design of InGaN blue laser diodes with indium-tin-oxide and dielectric cladding layers*, "Nanomaterials" 2024, vol. 14, no. 17, art. 1409, pp. 1–13.

- [18] Zhang E., Zeng Y., Kang W., Zhong Z., Wang Y., Yan T., Huang S., Zhang Z., Lin K., Kang J., *High-power GaN-based blue laser diodes degradation investigation and anti-aging solution*, "Advanced Photonics Research" 2024, vol. 5, no. 11, art. 2400119, pp. 1–12.
- [19] Uchida S., Takeya M., Ikeda S., Mizuno T., Fujimoto T., Matsumoto O., Goto S., Tojyo T., Ikeda M., *Recent progress in high-power blue-violet lasers*, "IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics" 2003, vol. 9, no. 5, pp. 1252–1259.
- [20] Hou Y., Zhao D., Liang F., Liu Z., Yang J., Chen P., *Enhancing the efficiency of GaN-based laser diodes by the designing of a p-AlGaIn cladding layer and an upper waveguide layer*, "Optical Materials Express" 2021, vol. 11, no. 6, pp. 1780–1790, 2021.
- [21] Dems M., Kotynski R., Panajotov K., *Plane Wave Admittance Method — a novel approach for determining the electromagnetic modes in photonic structures*, "Optics Express" 2005, vol. 13, no. 9, pp. 3196–3207.
- [22] Archambeault B., Ramahi O.M., Drench C., *EMI/EMC Computational Modeling Handbook*, Springer Science+Business Media, Nowy Jork 1998.
- [23] Kudrawiec R., Motyka M., Misiewicz J., Paszkiewicz B., Paszkiewicz R., Tłaczała M., *Contactless electroreflectance study of band gap renormalization for Mg-doped GaN*, "Journal of Physics D: Applied Physics" 2008, vol. 41, no. 16, art. 165109, pp. 1–4.
- [24] Oshima Y., Suzuki T., Eri T., Kawaguchi Y., Watanabe K., Shibata M., Mishima T., *Thermal and optical properties of bulk GaN crystals fabricated through hydride vapor phase epitaxy with void-assisted separation*, "Journal of Applied Physics" 2005, vol. 98, no. 10, art. 103509, pp. 1–4.
- [25] Kuc M., Sarzała R.P., *Modelowanie zjawisk fizycznych w krawędziowych laserach azotkowych oraz ich matrycach*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2019.
- [26] Photonics Group, *Python source code fragment for PLaSK (Photonic Lasers Simulation Kit)*, Unpublished code [Computer program], Institute of Physics, Lodz University of Technology, <https://plask.app/> (dostęp: 31.08.2025).
- [27] Kuc M., Sokół A.K., Piskorski Ł., Dems M., Wasiak M., Sarzała R.P., Czystanowski T., *ITO layer as an optical confinement for nitride edge-emitting lasers*, "Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences" 2020, vol. 68, no. 1, pp. 147–154.
- [28] Zhang X., Chua S.J., Liu W., Chong K.B., *Photorefectance study of Si-doped GaN grown by metal-organic chemical vapor deposition*, "Applied Physics Letters" 1998, vol. 72, no. 15, pp. 1890–1892.

- [29] Varshni Y.P., *Temperature dependence of the energy gap in semiconductors*, "Physica" 1967, vol. 34, no. 1, pp. 149–154.
- [30] Vurgaftman I., Meyer J.R., *Band parameters for nitrogen-containing semiconductors*, "Journal of Applied Physics" 2003, vol. 94, no. 6, pp. 3675–3696.
- [31] Vurgaftman I., Meyer J.R., *Electron Bandstructure Parameters*, [w:] Piprek J. (red.), *Nitride Semiconductor Devices. Principles and Simulation*, Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, Weinheim 2007, pp. 13–48.
- [32] Malitson I.H., *Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica*, "Journal of the Optical Society of America" 1965, vol. 55, no. 10, pp. 1205–1209.
- [33] Rakić A.D., Djurišić A.B., Elazar J.M., Majewski M.L., *Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices*, "Applied Optics" 1998, vol. 37, no. 22, pp. 5271–5283.
- [34] Ciddor P.E., *Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared*, "Applied Optics" 1996, vol. 35, no. 9, pp. 1566–1573.
- [35] Kuramoto M., Sasaoka C., Futagawa N., Nido M., Yamaguchi A.A., *Reduction of internal loss and threshold current in a laser diode with a ridge by selective re-growth (RiS-LD)*, "Physica Status Solidi" 2002, vol. 192, no. 2, pp. 329–334.
- [36] Ng H.M., Doppalapudi D., Moustakas T.D., Weimann N., Eastman L.F., *The role of dislocation scattering in n-type GaN films*, "Applied Physics Letters" 1998, vol. 73, no. 6, pp. 821–823.
- [37] Eiting C.J., Grudowski P.A., Dupuis R.D., *Growth of low resistivity p-type GaN by metal organic chemical vapour deposition*, "Electronics Letters" 1997, vol. 33, no. 23, pp. 1987–1989.
- [38] Piprek J., *Efficiency models for GaN-based light-emitting diodes: Status and challenges*, "Materials" 2020, vol. 13, no. 22, art. 5174, pp. 1–18.
- [39] Pimputkar S., Suihkonen S., Imade M., Mori Y., Speck J.S., Nakamura S., *Free electron concentration dependent sub-bandgap optical absorption characterization of bulk GaN crystals*, "Journal of Crystal Growth" 2015, vol. 432, pp. 49–53.
- [40] Kucharski R., Janicki Ł., Zajac M., Welna M., Motyka M., Skierbiszewski C., Kudrawiec R., *Transparency of semi-insulating, n-type, and p-type ammonothermal GaN substrates in the near-infrared, mid-infrared, and THz spectral range*, "Crystals" 2017, vol. 7, no. 7, art. 187, pp. 1–10.
- [41] Perlin P., Czystanowski T., Marona Ł., Grzanka S., Kafar A., Stańczyk S., Leszczyński M., Bockowski M., Muziol G., Kuc M., Sarzała R., *Highly doped GaN: A material for plasmonic claddings for blue/green InGaN laser diodes*,

- [w:] Chyi J.I., Nanishi Y., Morkoç H., Piprek J., Yoon E. (red.), *Gallium Nitride Materials and Devices VII, Proceedings of SPIE* 2012, vol. 8262, art. 826216, pp. 1–8.
- [42] Huang C.Y., Lin Y.D., Tyagi A., Chakraborty A., Ohta H., Speck J.S., Den-Baars S.P., Nakamura S., *Optical waveguide simulations for the optimization of InGaN-based green laser diodes*, "Journal of Applied Physics" 2010, vol. 107, no. 2, art. 023101, pp. 1–7.
- [43] Khashan M.A., Nassif A.Y., *Dispersion of the optical constants of quartz and polymethyl methacrylate glasses in a wide spectral range: 0.2–3 μm* , "Optics Communications" 2001, vol. 188, no. 1–4, pp. 129–139.
- [44] Xing Z., Li C., Han Y., Hu H., Cheng Z., Wang J., Liu T., *Waveguide-integrated graphene spatial mode filters for on-chip mode-division multiplexing*, "Optics Express" 2019, vol. 27, no. 14, pp. 19188–19195.