

JACEK WIŚNIEWSKI

**Katedra Mechaniki i Informatyki Technicznej
Politechniki Łódzkiej**

PROJEKTOWANIE OPTYMALNYCH STRUKTUR KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH Z WYKORZYSTANIEM ALGORYTMÓW EWOLUCYJNYCH I HYBRYDOWYCH*

Recenzenci: **prof. dr hab. Izabella Krucińska,
prof. dr hab. Witold Gutkowski**

W pracy zajęto się problemem projektowania optymalnych struktur kompozytów włóknistych tak, aby element konstrukcyjny wykonany z tego materiału spełniał stawiane wymagania w zakresie określonych własności mechanicznych i wytrzymałościowych. Do poszukiwania optymalnych rozwiązań opracowano hybrydowy system optymalizacyjny, składający się ze współpracujących ze sobą algorytmów: ewolucyjnego i gradientowego.

1. WPROWADZENIE

Dynamiczny rozwój nowych technologii powoduje, że współczesny inżynier-konstruktor dostaje do swej dyspozycji nowe materiały o własnościach znacznie odbiegających od własności tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych. Do grupy takich materiałów należą m.in. kompozyty włókniste będące mieszaniną materiału matrycy i wzmocnienia w postaci włókien. Kompozyty włókniste charakteryzują się przede wszystkim bardzo dobrymi parametrami mechanicz-

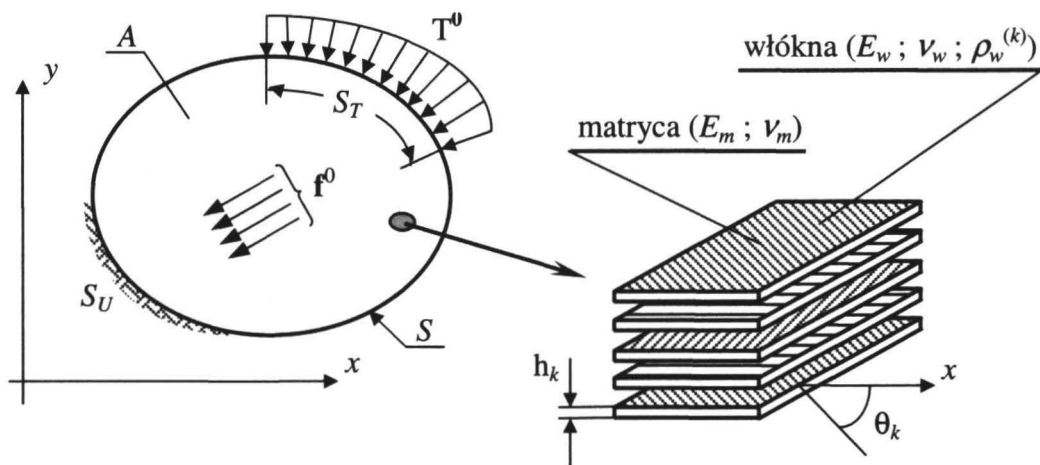
* Opracowanie jest streszczeniem rozprawy doktorskiej autora. Promotorem pracy jest prof. dr hab. Krzysztof Dems.

nymi i wytrzymałościowymi przy niskiej masie. Dlatego też materiały te są coraz częściej stosowane w różnego rodzaju konstrukcjach dla pracy których właściwości te mają ogromne znaczenie.

W przypadku konstrukcji wykonanych z materiałów kompozytowych, analiza ich zachowania się pod obciążeniem roboczym jest nierozłączna od analizy struktury kompozytu. Można więc powiedzieć, że każda, a szczególnie odpowiedzialna konstrukcja wymaga indywidualnego zaprojektowania odpowiedniego dla niej materiału kompozytowego poprzez dobór najlepszego zestawu parametrów strukturalnych takich m.in. jak właściwości mechaniczne matrycy i włókien, udział objętościowy i kształt wzmocnienia czy też liczba i grubość warstw.

2. OBIEKT BADAŃ

W pracy zostały rozpatrzone płaskie, dwuwymiarowe i liniowo-sprężyste elementy konstrukcyjne zajmujące obszar A z brzegiem S (rys.1). Elementy te są obciążone statycznie siłami: masowymi \mathbf{f}^0 w obszarze A i obciążeniem \mathbf{T}^0 na brzegu S_T , działającymi w ich płaszczyźnie, oraz podparte na brzegu S_U .



Rys.1. Kompozytowy element konstrukcyjny poddany obciążeniu statycznemu

Analizowane elementy konstrukcyjne wykonane są z materiału kompozytowego w postaci jedno lub wielowarstwowego laminatu zbudowanego z symetrycznych względem jego płaszczyzny środkowej warstw matrycy wzmocnionych włóknami o wyższych niż matryca właściwościach mechanicznych. Założono, że matryca jest jednorodna, izotropowa i liniowo-sprężysta o określonym module Younga E_m i współczynniku Poissona ν_m , zaś włókna są długie, jednorodne, izotropowe i liniowo-sprężyste o module Younga E_w i współczynniku Poissona ν_w oraz równomiernie i jednokierunkowo rozłożone w matrycy, a ich udział objętościowy w poszczególnych warstwach kompozytu wynosi $\rho_w^{(k)}$.

3. ANALIZA PRACY KOMPOZYTOWYCH KONSTRUKCJI

Pod wpływem działania obciążeń roboczych w kompozytowym elemencie konstrukcyjnym (rys. 1) powstaje pole przemieszczeń \mathbf{u} oraz związane z nim pole odkształceń \mathbf{e} i pole sił wypadkowych \mathbf{N} stanowiące uśrednioną wielkość naprężeń warstwowych po grubości laminatu: Zachowanie struktury przedstawionej na rysunku 1 można więc opisać poprzez [8]:

– równanie równowagi:

$$\operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{f}^0 = 0 \quad (1)$$

– związki kinematyczne:

$$\mathbf{e} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{B} jest operatorem różniczkowym wiążącym przemieszczenia z odkształceniami,

– związki konstytutywne:

$$\mathbf{N} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} \quad (3)$$

gdzie \mathbf{D} jest macierzą sztywności tarczowej kompozytu,

– warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^0 & \text{na brzegu } S_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 & \text{na brzegu } S_U \end{cases} \quad (4)$$

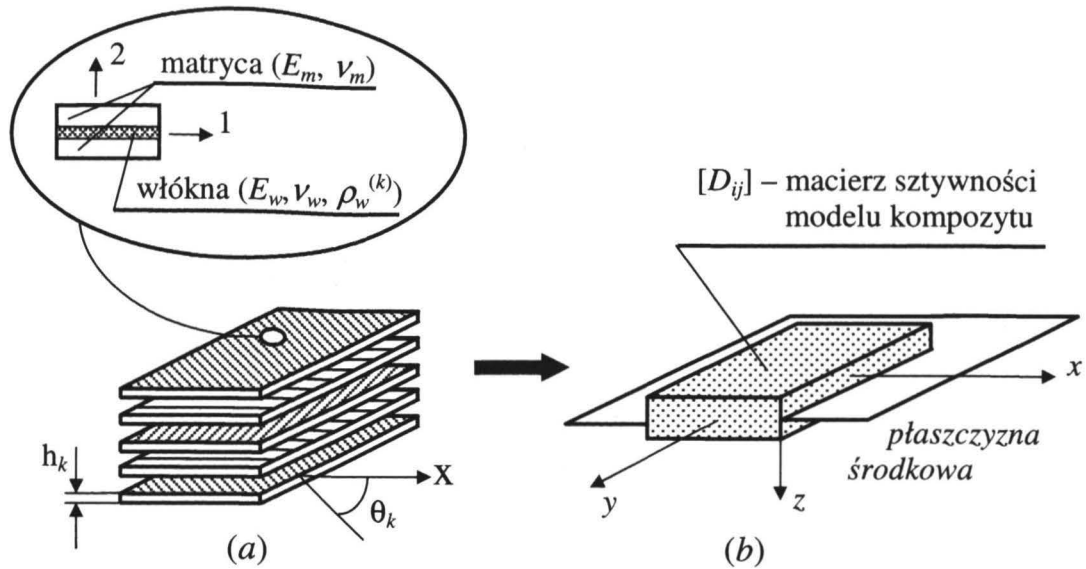
gdzie \mathbf{n} jest normalną do brzegu zewnętrznego S konstrukcji.

Rozwiązanie układu równań (1-4), prowadzące do wyznaczenia parametrów stanu w postaci pól przemieszczeń \mathbf{u} , odkształceń \mathbf{e} i sił wypadkowych \mathbf{N} , stanowi etap analizy pracy konstrukcji w procesie jej projektowania.

4. MODELOWANIE MATERIAŁU KOMPOZYTOWEGO

Do celów analizy pracy elementu konstrukcyjnego, mikroskopowo niejednorodny materiał kompozytowy został zastąpiony, w skali makroskopowej jednorodnym materiałem ortotropowym (rys. 2). Dla tak określonego materiału jego macierz sztywności tarczowej \mathbf{D} można wyrazić zależnością [4]:

$$\mathbf{D} = 2 \sum_{k=0}^n h_k \cdot \mathbf{T}_k^{-1} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{T}_k^{-T} \quad (5)$$



Rys. 2. Modelowanie materiału kompozytowego
(a) – rzeczywisty kompozyt, (b) – model kompozytu

Występująca w równaniu (5) macierz \mathbf{C}_k jest macierzą sztywności dla k -tej warstwy kompozytu w układzie osi ortotropii 1-2 wyznaczonym przez kierunek włókien i kierunek prostopadły do włókien i ma postać [4]:

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & \frac{E_1^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & 0 \\ \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

zaś \mathbf{T}_k jest macierzą transformacji związaną z obrotem układu odniesienia o kąt θ_k zawarty między kierunkiem osi włókien w k -tej warstwie, a osią x globalnego układu współrzędnych [4]:

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \cos \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

Macierz \mathbf{C}_k określona zależnością (6), jest wyrażona w stałych inżynierskich k -tej warstwy kompozytu, przy czym $E_1^{(k)}$ i $E_2^{(k)}$ są odpowiednio podłużnym i poprzecznym modułem Younga, $\nu_{12}^{(k)}$ i $\nu_{21}^{(k)}$ oznaczają większy i mniejszy współczynnik Poissona, zaś $G_{12}^{(k)}$ jest modułem ścinania tej warstwy w układzie osi 1-2.

Wykorzystując model laminy prezentowany m.in. w pracach [3,6], stałe te można wyrazić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 E_1^{(k)} &= E_w \rho_w^{(k)} + E_m (1 - \rho_w^{(k)}) \\
 E_2^{(k)} &= \frac{E_w \left[1 + \left(\frac{E_w}{E_m} - 1 \right) \rho_w^{(k)} \right]}{\left[\rho_w^{(k)} + \frac{E_w}{E_m} (1 - \rho_w^{(k)}) \right] \left[1 + \left(\frac{E_w}{E_m} - 1 \right) \rho_w^{(k)} \right] - \left(v_m \frac{E_w}{E_m} - v_w \right)^2 \rho_w^{(k)} (1 - \rho_w^{(k)})} \\
 v_{12}^{(k)} &= v_w \rho_w^{(k)} + v_m (1 - \rho_w^{(k)}) \\
 v_{21}^{(k)} &= \frac{E_2^{(1)}}{E_1^{(1)}} v_{12}^{(1)} \\
 G_{12}^{(k)} &= \frac{E_m \left[\frac{E_w}{E_m} (1 + v_m) (1 + \rho_w^{(k)}) + (1 + v_w) (1 - \rho_w^{(k)}) \right]}{2(1 + v_m) \left[\frac{E_w}{E_m} (1 + v_m) (1 - \rho_w^{(k)}) + (1 + v_w) (1 + \rho_w^{(k)}) \right]}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Z zależności (5-8) wynika, że macierz sztywności kompozytu \mathbf{D} zależy od własności mechanicznych matrycy i włókien wzmacniających, udziału objętościowego włókien oraz ich orientacji w poszczególnych warstwach, a także liczby i grubości warstw:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(E_m, v_m, E_w, v_w, \rho_w^{(k)}, \theta_k, n, h_k) \tag{9}$$

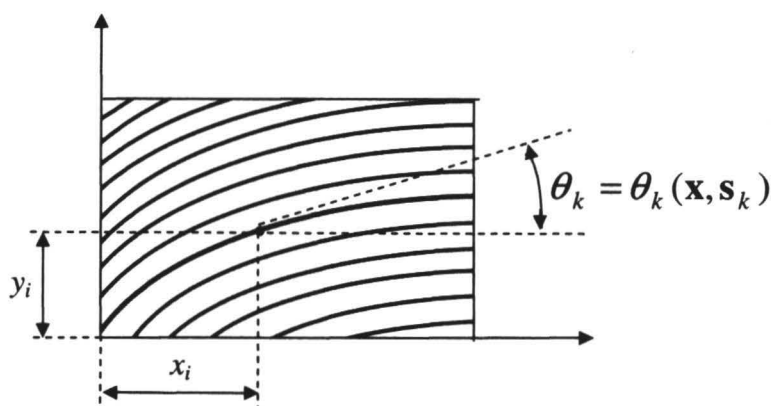
Każdy z wymienionych parametrów strukturalnych w różnym stopniu decyduje o własnościach mechanicznych kompozytu, a w konsekwencji także wykonanej z niego konstrukcji.

5. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTYMALIZACJI

W celu efektywnego projektowania konstrukcji etap analizy należy rozszerzyć o matematyczne metody optymalizacyjne, które pozwalają na znalezienie najlepszego i spełniającego wszystkie stawiane wymogi rozwiązania drogą racjonalnego, a nie intuicyjnego poszukiwania konstrukcji optymalnej. W takim przypadku projektowanie staje się synonimem zadania optymalizacji.

W niniejszej pracy projektowanie optymalnych struktur kompozytów włóknistych rozpatrzono z uwagi na parametry określające rozmieszczenie włókien w materiale kompozytowym, tj. orientację i/lub kształt osi włókien oraz udział objętościowy włókien w każdej warstwie.

Jak pokazano na rysunku 3, orientacja włókien wzmacniających θ_k jest określona poprzez kąt zawarty pomiędzy osią włókien w dowolnym i -tym punkcie k -tej warstwy kompozytu a osią x globalnego układu odniesienia. W obszarze warstwy parametr ten może być stały i wówczas włókna są ułożone prostoliniowo w matrycy lub może być zmienny i wtedy włókna w matrycy są ułożone krzywoliniowo. W tym drugim przypadku orientacja włókien zależy od zbioru parametrów kształtu \mathbf{s}_k określających krzywą przyjętą do opisu kształtu osi tzw. „włókna wzorcowego” w k -tej warstwie kompozytu, tzn. $\theta_k = \theta_k(\mathbf{x}, \mathbf{s}_k)$.



Rys. 3. Orientacja włókna w k -tej warstwie kompozytu

Udział objętościowy włókien $\rho_w^{(k)}$, to natomiast parametr strukturalny, definiowany jako stosunek objętości włókien k -tej warstwy do całkowitej objętości tej warstwy.

Reasumując, rozmieszczenie włókien w materiale kompozytowym można więc określić poprzez:

- zbiór parametrów kształtu \mathbf{s}_k definiujących ułożenie włókien w każdej warstwie, tj. orientację i/lub ich kształt,
- udział włókien $\rho_w^{(k)}$ w każdej warstwie, decydujący o wypełnieniu warstwy włóknami.

Wymienione parametry strukturalne stanowią wektor zmiennych projektowych $\mathbf{b} = \{\mathbf{s}_k, \rho_w^{(k)}\}$.

Projektowanie optymalnych struktur kompozytowych zostało rozpatrzone pod kątem uzyskania przez element konstrukcyjny wykonany z tego materiału określonych własności mechanicznych i wytrzymałościowych. W związku z tym jako funkcjonal celu przyjęto pewną lokalną lub globalną miarę jakości opisującą zachowanie się elementu konstrukcyjnego pod wpływem działających obciążeń z uwagi na przyjęte zmienne projektowe. W ogólnej formie funkcjonal celu F_c został wyrażony jako:

$$F_c = \int_A \Gamma(\mathbf{N}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \mathbf{b}) dA + \int_{S_T} \Psi(\mathbf{T}^0, \mathbf{u}) dS_T \quad (10)$$

gdzie Γ i Ψ są nieliniowymi, ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami swoich argumentów.

Ostatecznie, rozpatrywany problem projektowania optymalnych struktur kompozytowych został zapisany w postaci następującego zadania optymalizacji:

$$\min. \text{ lub } \max F_c(\mathbf{b}) \quad (11)$$

przy spełnieniu:
ograniczeń mechanicznych:

$$G_i(\mathbf{b}) - G_0 \leq 0$$

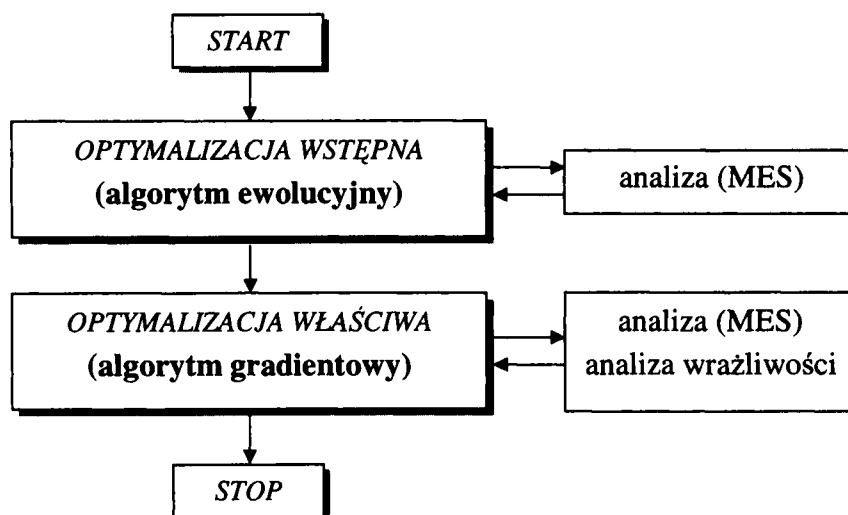
lub ograniczonym koszcie materiału:

$$C(\mathbf{b}) - C_0 \leq 0$$

gdzie G_0 jest nałożoną z góry pewną własnością mechaniczną konstrukcji, zaś C_0 zadany maksymalny kosztem kompozytowej struktury.

6. HYBRYDOWY SYSTEM OPTIMALIZACJI STRUKTURY MATERIAŁÓW KOMPOZYTOWYCH

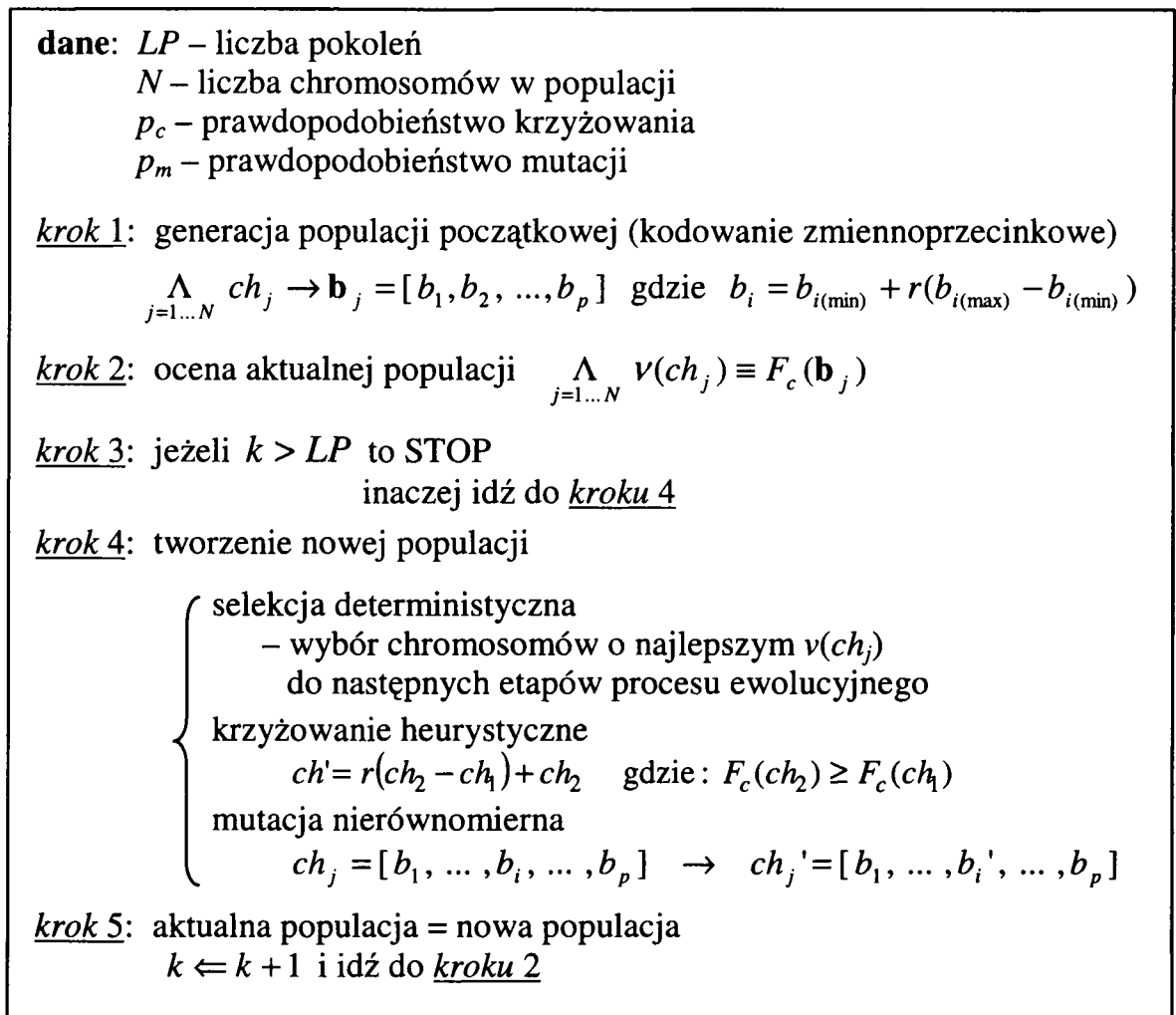
Do rozwiązania, sformułowanego w rozdziale 5, zadania optymalnego projektowania struktury materiałów kompozytowych (11) opracowany został tzw. hybrydowy system optymalizacyjny składający się z dwóch współpracujących ze sobą algorytmów: ewolucyjnego i gradientowego (rys. 4).



Rys. 4. Hybrydowy system optymalizacyjny

Etap optymalizacji wstępnej stanowi algorytm ewolucyjny, który oparty jest na naśladowaniu naturalnych procesów zachodzących w przyrodzie [7]. Sieć działań tego algorytmu przedstawiono na rysunku 5.

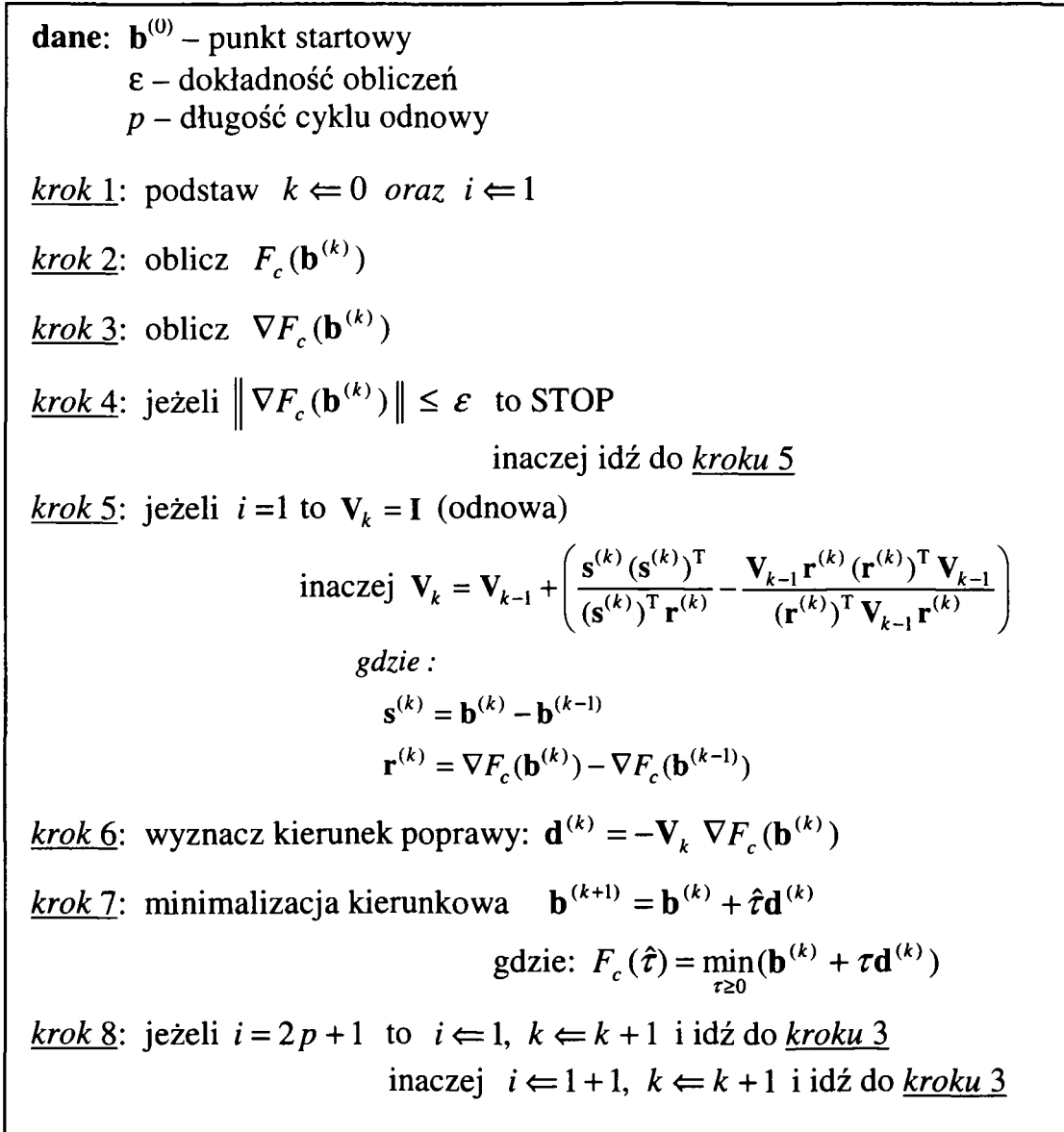
Algorytm ewolucyjny startuje z losowo wybranego punktu początkowego, generując w kolejnych pokoleniach rozwiązanie bliższe rozwiązaniu optymalnemu. W kroku oceny populacji algorytm współpracuje z metodą elementów skończonych [9], w której zostają wyznaczone pola stanu obciążonej mechanicznie kompozytowej konstrukcji z uwagi na wygenerowane w aktualnej populacji wartości zmiennych projektowych, a w konsekwencji także wartość rozpatrywanego funkcjonału celu.



Rys. 5. Sieć działań algorytmu ewolucyjnego

W celu zwiększenia efektywności obliczeń w etapie tzw. optymalizacji właściwej zastosowano jedną z gradientowych technik optymalizacyjnych, a mianowicie metodę zmiennej metryki [2]. Sieć działań tej metody pokazano na rysunku 6, przy czym algorytm startuje z punktu wygenerowanego w końcowej fazie algorytmu ewolucyjnego.

Zastosowanie metody zmiennej metryki w procesie optymalizacji struktury kompozytowych elementów konstrukcyjnych wymagało, w kroku 3 algorytmu, obliczenia gradientu (wrażliwości pierwszego rzędu) funkcjonału mierzącego jakość konstrukcji względem zmiennych projektowych.



Rys. 6. Sieć działań metody zmiennej metryki

Dla funkcjonału celu F_c , określonego zależnością (10), jego wrażliwość pierwszego rzędu z uwagi na i -tą składową wektora zmiennych projektowania b_i (gdzie: $i = 1, \dots, p$) ma postać:

$$F_{c, b_i} = \int_A (\Gamma_{, b_i} + \Gamma_{, \mathbf{N}} \cdot \mathbf{N}_{, b_i} + \Gamma_{, \mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}_{, b_i} + \Gamma_{, \mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{, b_i}) dA + \int_{S_T} (\Psi_{, \mathbf{T}^0} \cdot \mathbf{T}_{, b_i}^0 + \Psi_{, \mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{, b_i}) dS_T \quad (12)$$

i wymaga znajomości pochodnych pól stanu $\mathbf{u}_{, b}$, $\mathbf{e}_{, b}$ oraz $\mathbf{N}_{, b}$. Do ich wyznaczenia zastosowano metodę bezpośrednią analizy wrażliwości [1]. W metodzie tej, nieznanne pochodne pól stanu obliczane są przez rozwiązanie pewnych dodatkowych problemów brzegowych, opisanych równaniami otrzymanymi w wyniku różniczkowania równań problemu podstawowego względem każdego elementu wektora zmiennych projektowych.

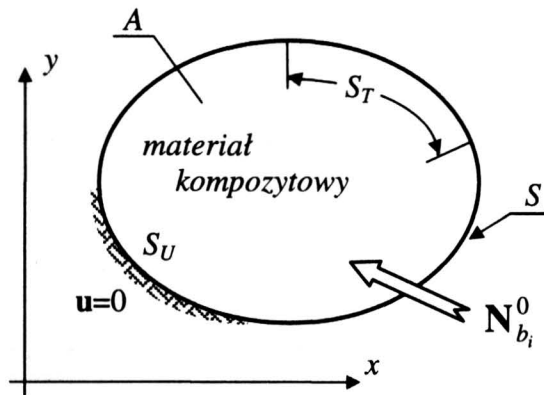
Różniczkując zatem równania (1-4), opisujące zachowanie się konstrukcji podstawowej (rys. 1), względem zmiennej b_i otrzymujemy:

$$\operatorname{div} \mathbf{N}_{,b_i} = 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_{,b_i} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{,b_i} \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_{,b_i} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{,b_i} + \mathbf{D}_{,b_i} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{,b_i} + \mathbf{N}_{b_i}^0 \quad (15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{,b_i} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{na brzegu } S_T \\ \mathbf{u}_{,b_i} = 0 & \text{na brzegu } S_U \end{cases} \quad (16)$$



Rys. 7. i -ta konstrukcja dodatkowa rozpatrywana w analizie wrażliwości

Otrzymany układ równań (13-16) opisują tzw. „ i -tą konstrukcję dodatkową” o takim samym kształcie i wykonaną z materiału kompozytowego o takich samych parametrach mechanicznych jak konstrukcja podstawowa, ale poddaną działaniu uogólnionych naprężeń początkowych \mathbf{N}_b^0 (rys. 7). Pola te wywołane są zmianą macierzy sztywności kompozytu \mathbf{D} z uwagi na i -tą składową wektora zmiennych projektowania \mathbf{b} , przy czym z zależności (5) wrażliwość macierzy \mathbf{D} względem składowej s_k wynosi:

$$\mathbf{D}_{,b_i=s_k} = 2h_k [(\mathbf{T}_k^{-1})_{,s_k} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{T}_k^{-T} + \mathbf{T}_k^{-1} \cdot \mathbf{C}_k \cdot (\mathbf{T}_k^{-T})_{,s_k}] \quad (17)$$

gdzie:

$$(\mathbf{T}_k)_{,s_k} = \frac{\partial \mathbf{T}_k}{\partial \theta_k} \cdot \frac{\partial \theta_k}{\partial s_k} \quad (18)$$

natomiast względem składowej $\rho_w^{(k)}$ wynosi:

$$\mathbf{D}_{, b_i = \rho_w^{(k)}} = 2h_k \cdot \mathbf{T}_k^{-1} \cdot (\mathbf{C}_k)_{, \rho_w^{(k)}} \cdot \mathbf{T}_k^{-T} \quad (19)$$

Szukane pochodne pól konstrukcji podstawowej wyrażają się zatem przez odpowiednie pola stanu i -tej konstrukcji dodatkowej i są otrzymywane w wyniku rozwiązania układu równań (13-16). W praktyce analityczne wyrażenia na wrażliwość poddaje się dyskretyzacji i oblicza numerycznie przy wykorzystaniu metody elementów skończonych [9].

7. PRZYKŁAD

W rozdziale tym przedstawiono praktyczne rozwiązanie rozpatrywanego w pracy problemu projektowania optymalnych struktur kompozytowych. Rozpatrzono prostokątną tarczę poddaną obciążeniu i warunkom brzegowym jak pokazano na rysunku 8. Tarcza wykonana jest z kompozytu w postaci laminatu zbudowanego z 3 warstw epoksydowej matrycy wzmocnionych jednokierunkowo długimi włóknami szklanymi.

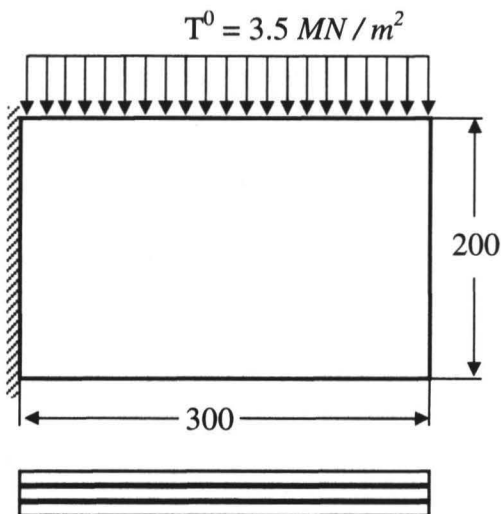


Tabela 1

Dane materiałowe składników kompozytu

	E [MPa]	ν	ρ [%]
włókna (szklane E)	$75 \cdot 10^3$	0.25	45
matryca (epoksyd)	$3.5 \cdot 10^3$	0.38	55

Dane na podstawie [4]

Rys. 8. Kompozytowa tarcza poddana obciążeniu i warunkom brzegowym

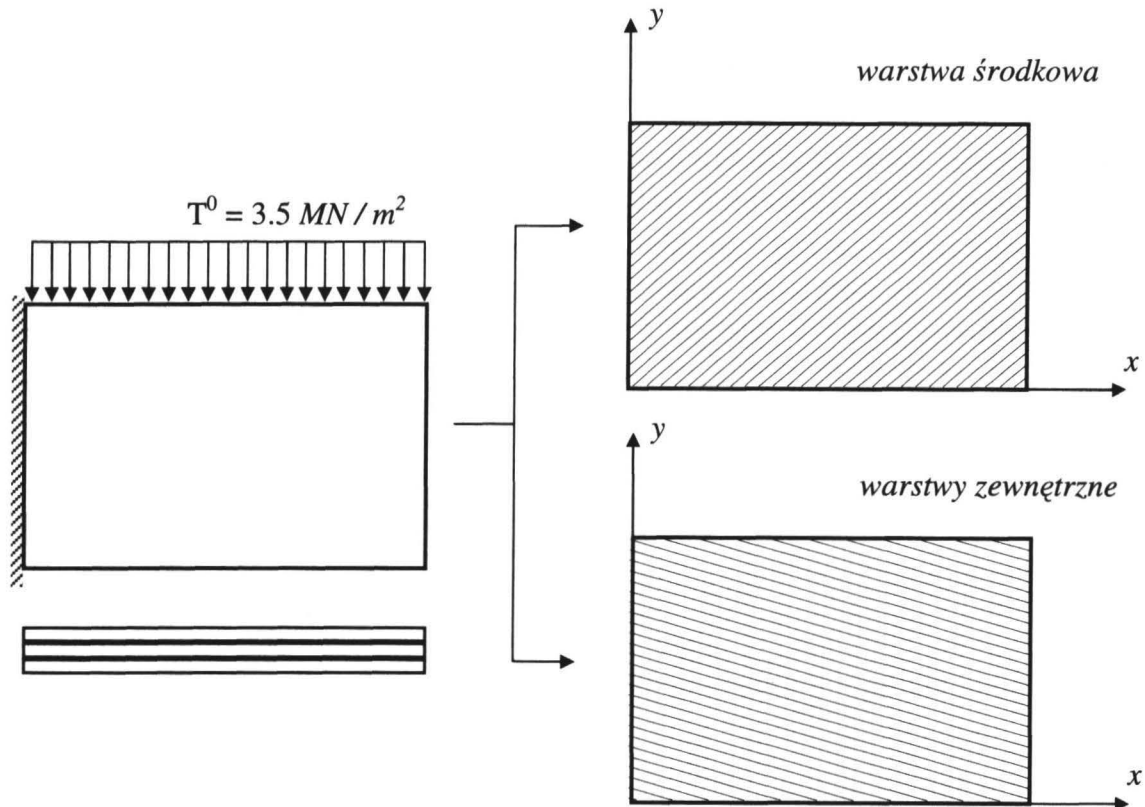
Problem dotyczy zaprojektowania takiego kształtu osi włókien wzmacniających w poszczególnych warstwach kompozytowego materiału, który będzie realizować maksimum sztywności rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego. Za konstrukcję najszywniejszą przyjmuje się konstrukcję, dla której praca wykonywana przez obciążające konstrukcję siły zewnętrzne na wywołanych przez nie przemieszczeniach osiąga minimum. Rozpatrywany problem można więc zapisać w postaci następującego zadania optymalizacji:

$$F_c(\mathbf{b}) = WP = \int_{S_T} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{T}^0 dS_T \rightarrow \min. \quad (20)$$

gdzie \mathbf{b} jest wektorem parametrów kształtu przyjętych do opisu kształtu osi włókna wzorcowego w poszczególnych warstwach kompozytu.

Przypadek 1 (włókna prostoliniowe)

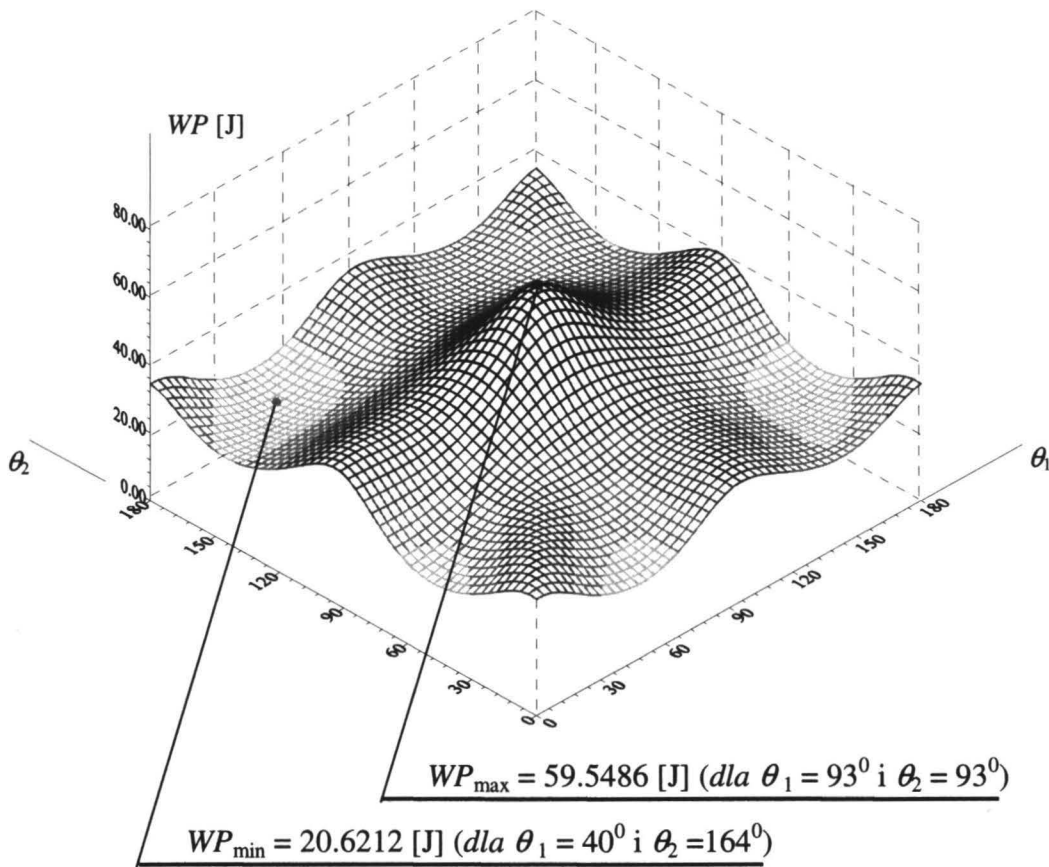
W pierwszym z przypadków warstwy kompozytu zostały wzmocnione rodzinami prostoliniowych włókien, dla których jako zmienne projektowe przyjęto 2 kąty orientacji θ_1 i θ_2 opisujące ułożenie włókien odpowiednio w warstwie środkowej i warstwach zewnętrznych kompozytu.



Rys. 9. Kompozytowa tarcza po optymalizacji prostoliniowymi włóknami

W wyniku przeprowadzonej optymalizacji (rys. 9) uzyskano następujące wartości zmiennych projektowych: $\theta_1 = 40.48^\circ$ i $\theta_2 = 164.36^\circ$ dla których to wartości funkcjonał celu osiągnął wartość minimalną $WP_{\min} = 20.6195$ [J].

W celu weryfikacji uzyskanych rezultatów optymalizacji przeprowadzono analizę pracy WP wykonanej przez siły zewnętrzne obciążające tarczę na wywołanych przez nie przemieszczeniach w zależności od kątów ułożenia prostoliniowych włókien w poszczególnych warstwach kompozytu (rys. 10).



Rys. 10. Wykres zależności $WP = f(\theta_1, \theta_2)$ dla rozpatrywanej tarczy

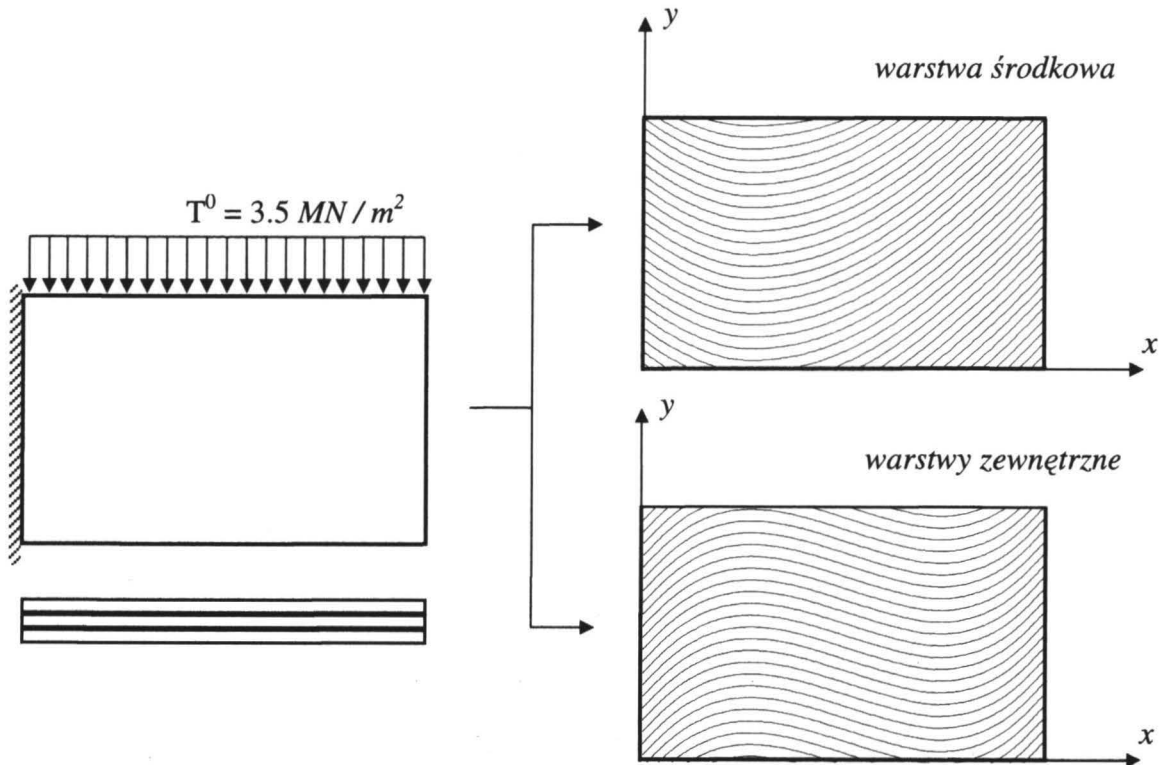
W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że tarcza charakteryzuje się największą sztywnością dla włókien ułożonych pod kątem $\theta_1 = 40^\circ$ w warstwie środkowej i $\theta_2 = 164^\circ$ w warstwach zewnętrznych, co potwierdza rezultaty uzyskane w procesie optymalizacji. Ponadto można stwierdzić, że takie zaprojektowanie struktury kompozytu zwiększa sztywność tarczy o około 34% w stosunku do identycznej tarczy wykonanej z takiego samego materiału kompozytowego, ale wzmocnionej prostoliniowymi włóknami ułożonymi pod kątem 93° w każdej z warstw kompozytu, dla których to wartości tarcza charakteryzuje się najmniejszą sztywnością.

Przypadek 2 (włókna krzywoliniowe)

Kształt osi włókien w poszczególnych warstwach kompozytowego materiału tarczy został opisany krzywą Bezierra postaci [5]:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = \sum_{j=0}^m \begin{cases} x_j^{(k)} \\ y_j^{(k)} \end{cases} \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (21)$$

wielkości $x_j^{(k)}$ i $y_j^{(k)}$ są współrzędnymi j -wierzchołków wieloboku Beziera, stanowiącego podstawę konstrukcji tej krzywej w k -tej warstwie kompozytu. Współrzędne te stanowią wektor zmiennych projektowych.



Rys. 11. Tarcza po optymalizacji włóknami o osi opisanej krzywą Beziera

Kształt osi włókien w poszczególnych warstwach kompozytowego materiału tarczy po procesie optymalizacji przedstawiono na rysunku 11. Dla tak zaprojektowanej struktury, wartość pracy sił zewnętrznych wyniosła $WP = 19.4103$ [J], w wyniku czego uzyskano dalszy wzrost sztywności o 6% w porównaniu z optymalnym rozwiązaniem uzyskanym w przypadku 1.

8. PODSUMOWANIE

Wyniki przedstawione w rozprawie pozwalają stwierdzić, że pełne zalety kompozytowych materiałów konstrukcyjnych można uzyskać w przypadku optymalnego rozmieszczenia i ukształtowania osi włókien wzmacniających w matrycy z punktu widzenia przyjętej w procesie optymalizacji miary jakości kompozytu.

Zaproponowana technika optymalizacyjna, polegająca na połączeniu algorytmu ewolucyjnego z algorytmem gradientowym jest efektywnym narzędziem w rozwiązywaniu zadań projektowania optymalnych struktur kompozytów włóknistych.

Uzyskane wyniki mogą stanowić punkt wyjścia do projektowania struktury materiału kompozytowego stanowiącego tworzywo konkretnej konstrukcji pracującej pod zadaniem obciążeniem pozwalając tym samym uniknąć kosztownych i pracochłonnych badań doświadczalnych, które można ograniczyć do końcowych badań eksperymentalnych gotowej konstrukcji.

LITERATURA

- [1] **Dems K., Mróz Z.:** Variational approach to first- and second-order sensitivity analysis of elastic structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21** (1985) 637-661.
- [2] **Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A.:** Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1980.
- [3] **Hashin Z., Rosen B.:** The elastic moduli of fibre-reinforced materials, *Journal of Applied Mechanics*, June (1964) 223-232.
- [4] **Jones R.M.:** Mechanics of composite materials, Scripta Book Company, 1975.
- [5] **Kiciak P.:** Podstawy modelowania krzywych i powierzchni - zastosowania w grafice komputerowej, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2000.
- [6] **Malmajster A.K., Tamuz V., Teters G.:** Soprotivlenie žestkich polimernych materialov, Ryga, Zinatne 1967.
- [7] **Michalewicz Z.:** Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1996.
- [8] **Timoshenko S., Goodier J.N.:** Teoria sprężystości, Warszawa, Arkady 1962.
- [9] **Zienkiewicz O.C.:** Metoda elementów skończonych, Warszawa, Arkady 1972.

DESIGN OF OPTIMAL STRUCTURES OF FIBRE COMPOSITES USING EVOLUTION AND HYBRID ALGORITHMS

Summary

The dissertation is devoted to the problem of optimal design of two-dimensional structures made of fibre-reinforced composite materials subjected to service loading. The problem of optimal design of fibre shape or orientation and fibre density in the composite so that the structure should satisfy assumed requirements in the range of material mechanical properties is discussed. The hybrid optimisation algorithm, consists of a sequence of evolution and gradient-oriented procedures, is applied during design process.

Department of Technical Mechanics and Informatics
Technical University of Łódź